REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
Honneur – Fraternité – Justice

Ministère de l'Education Nationale
Institut Pédagogique National

BAC D - Série Scientifiques

Annale BAC

Mathématiques

2010 - 2020

Préparer et Designer par *PrepaBAC*

BAC 2010
Session Normale

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2010 session Normale

Exercice 1(3points)

On considère une fonction f dérivable sur son domaine de définition D_f de dérivée f'.Son tableau de variation est donné ci-dessous .On nomme (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'(x)		+	||	−	0	+	
f(x)	-3	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	-4	↗	$+\infty$

Pour chaque question, parmi les réponses proposées une seule réponse est exacte

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	L'ensemble de définition de f est :	$\mathbb{R}\backslash\{-2\}$	$\mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$	$\mathbb{R}\backslash\{1\}$
2	L'équation f(x)=0 admet dans D_f exactement	3 solutions	2 solutions	1 solution
3	La courbe (C) admet une asymptote d'équation	$x = 1$	$x = -2$	$y = -2$
4	La fonction f est une fonction	Paire	Impaire	ni paire ni impaire
5	L'équation de la tangente à (C) au point d'abscisses x_0 =1 est	$x = 1$	$y = 0$	$y = -4$

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci- dessous. Aucune justification n'est demandée.

N° question	1	2	3	4	5
Réponse Exacte					

Exercice 2 (4points)

Pour tout nombre z on pose : $p(z) = z^3 - z^2 - 4z - 6$

1°)a) Calculer $p(3)$

b) Déterminer les réels a, b tels que pour tout z on a $p(z)=(z-3)(z^2+az+b)$

c)Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $p(z) = 0$

2°) On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.les points A, B, C et D d'affixes respectifs $Z_A = 3+2i$;$Z_B = -1+i$, $z_C = -1-i$ et $Z_D = 3$

a) Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$

b) Comparer l'affixe du milieu de $[AC]$ à celle du milieu de $[BD]$

c) En déduire la nature du quadrilatère ABCD

d) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixes z telle que :

$$|z-3| = |z+1-i|$$

Exercice 3 (4points)

On considère la suite numérique(U_n) définie pour tout entier n ≥1 par :

$$U_n = \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$

1a) Calculer u_1 , u_2 et u_3

b) Justifier que la suite (U_n) ;

n'est pas arithmétique, n'est pas géométrique ; est convergente.

2°) pour tout entier $n \geq 1$ on pose : $v_n = \frac{n^2-1}{n}$

a)Montrer que :$U_n = V_{n+1} - V_n$

b) En déduire l'expression de la somme $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$en fonction de n

3) Pour tout entier $n \geq 2$ on pose $w_n = \ln V_n$ et $s'_n = W_2 + W_3 + \cdots + W_n$

Démontrer que $S'_n = \ln\left[\frac{(n+1)!}{2n}\right]$

Exercice 4 (9points)

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = x + 2 + e^x$ soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm

1a) Calculer les limites de $f(x)$ en -∞ et +∞

b) Calculer et donner une interprétation graphique de $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (x+2))$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

2) Dresser le tableau de variation de f

3°) Montrer que f réalise une bijection de R sur un intervalle J que l'on déterminera

4°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α puis vérifier que $-2,5 < \alpha < -2$

5°) Construire (C) et (C′) représentant respectivement la fonction f et sa réciproque f^{-1} dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

6a) Déterminer la primitive F de f qui vérifie $F(0) = 0$

Soit A (α) l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 0$

b) Calculer $A(\alpha)$ en fonction de α . Montrer que $A(\alpha) = \frac{6-2\alpha-\alpha^2}{2}$

7a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = \alpha$

b) Vérifier que $(f^{-1})'(0) = \frac{-1}{\alpha+1}$

8) On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln(x + 2 + e^x)$

a) Déterminer l'ensemble de définition de g

b) Dresser le tableau de variation de g

c) Construire la courbe (Γ) de g dans un nouveau repère orthonormé$(O;\vec{u},\vec{v})$.

FIN

Corrigé baccalauréat 2010 session Normale

Exercice 1

N° question	1	2	3	4	5
Réponse Exacte	A	A	B	C	C

Exercice 2

$p(z) = z^3 - z^2 - 4z - 6$

1a) $p(3) = 27 - 9 - 12 - 6 = 0$

b) $P(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$

$=z^3 + az^2 + bz - 3z^2 - 3az - 3b$

$p(z) = z^3 + (a-3)z^2 + (b-3a)z - 3b$

$$\begin{cases} a - 3 = -1 \\ b - 3a = -4 \\ -3b = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - 3a = -4 \\ b = 2 \end{cases}$$

$p(z) = (z-3)(z^2 + 2z + 2)$

c) $p(z) = 0 \Rightarrow (z-3)(z^2 + 2z + 2) = 0$

$\Rightarrow z = 3$ Où $z^2 + 2z + 2 = 0$

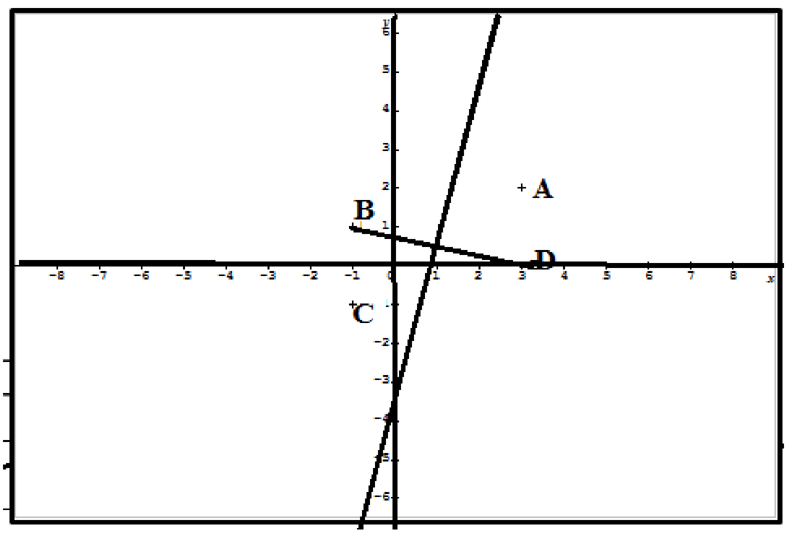
$\Delta = 4 - 8 = -4 = 4i^2$

$$z_1 = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$$

$$z_2 = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i$$

S= $\{3, -1 + i, -1 - i\}$

a)



b)

$$milieu\ de\ [AC] = \frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{3 + 2i - 1 - i}{2} = \frac{2 + i}{2} = 1 + \frac{1}{2}i$$

$$milieu\ de[BD] = \frac{Z_B + Z_D}{2} = \frac{-1 + i + 3}{2} = \frac{2 + i}{2} = 1 + \frac{1}{2}i$$

Les segments $[AC]$et $[BD]$ ont le même milieu

c) Puisque Les segments $[AC]$et $[BD]$ ont le même milieu donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

d) $|z-3| = |z+1-i| \Rightarrow \ |z_M - Z_D| = |z_M - Z_B|$

$\Rightarrow \ DM = BM$

L'ensemble des points est la médiatrice du $[BD]$

Exercice 3

$$U_n = \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$

1a) $U_1 = \frac{3}{2}$, $U_2 = \frac{7}{6}$, $U_3 = \frac{13}{12}$

b)

$$U_3 - U_2 = \frac{13}{12} - \frac{7}{6} = \frac{13}{12} - \frac{14}{12} = \frac{-1}{12}$$

$$U_2 - U_1 = \frac{7}{6} - \frac{3}{2} = \frac{14}{12} - \frac{18}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

$U_3 - U_2 \neq U_2 - U_1 \Rightarrow (U_n)$ n'est pas une suite arithmétique

$$\frac{U_3}{U_2} = \frac{\frac{13}{12}}{\frac{7}{6}} = \frac{13\times 6}{12\times 7} = \frac{13}{14}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{3}{2}} = \frac{7\times 2}{6\times 3} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{U_3}{U_2} \neq \frac{U_2}{U_1}$$

$\Rightarrow (U_n)$ n'est pas une suite arithmétique

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2+n}\right) = 1 \Rightarrow (U_n)$est convergente

2) a)

$$U_n = \frac{n^2+n+1}{n^2+n}$$

$$v_n = \frac{n^2-1}{n}$$

$$v_{n+1} = \frac{(n+1)^2-1}{n+1} = \frac{n^2+2n}{n+1}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n^2+2n}{n+1} - \frac{n^2-1}{n}$$

$$= \frac{n(n^2+2n) - (n^2-1)(n+1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n^3+2n^2-(n^3+n^2-n-1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n^3+2n^2-n^3-n^2+n+1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$

$v_{n+1} - v_n = U_n$

$U_n = v_{n+1} - v_n$

b) on effectue n relations

$$\begin{cases} U_1 = V_2 - V_1 \\ U_2 = V_3 - V_2 \\ U_3 = V_4 - V_3 \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ U_n = V_{n+1} - V_n \end{cases}$$

$$S_n = V_{n+1} - V_1$$

$$S_n = \frac{n^2 + 2n}{n + 1}$$

3) $w_n = \ln V_n$

$s'_n = W_2 + W_3 + \cdots + W_n$

$= \ln V_2 + lnV_3 + lnV_4 + \cdots + lnv_n$

$s'_n = ln(V_2 \times V_3 \times V_4 \times \ldots \times V_n)$

On a:

$$V_n = \frac{n^2 - 1}{n} = \frac{(n-1)(n+1)}{n}$$

$$V_2 = \frac{1 \times 3}{2}$$

$$V_3 = \frac{2 \times 4}{3}$$

$$V_4 = \frac{3 \times 5}{4}$$

$$V_5 = \frac{4 \times 6}{5}$$

$$V_6 = \frac{5 \times 7}{6}$$

$$V_7 = \frac{6 \times 8}{7}$$

.

.

.

$$v_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n}$$

$$s'_n = ln\left(\frac{1 \times 3}{2} \times \frac{2 \times 4}{3} \times \frac{3 \times 5}{4} \times \frac{4 \times 6}{5} \times \frac{5 \times 7}{6} \times \frac{6 \times 8}{7} \times \ \ldots \times \frac{(n-1)(n+1)}{n}\right)$$

$$s'_n = ln\left(\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \ldots . \times n(n+1)}{2n}\right)$$

$$s'_n = ln\left(\frac{(n+1)!}{2n}\right)$$

Exercice 4

$f(x) = x + 2 + e^x$

1a) $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x + 2 + e^x = -\infty + 2 - 0 = -\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x+2+e^x = +\infty + 2 + \infty = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-(x+2)) = \lim\limits_{x\to-\infty} x+2+e^x - x - 2 = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-(x+2)) = 0$ $\Rightarrow$ **La courbe (C) admet une asymptote oblique d'équation $y = x-2$ au voisinage de $-\infty$**

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2+e^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{2}{x}+\frac{e^x}{x} = +\infty$ $\Rightarrow$ **La courbe (C) admet une branche infinie de direction (OY) au voisinage de +∞.**

2) $f'(x) = 1+e^x > 0$

TV de f

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

3) f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $J = \mathbb{R}$ donc f réalise une bijection.

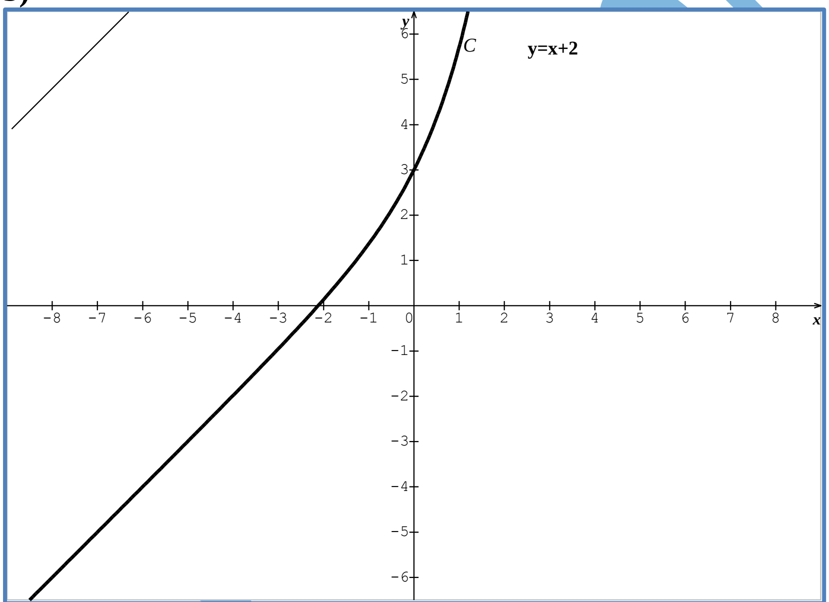
4) f réalise une bijection et change de signe une seule fois donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel α tel que f $(\alpha) = 0$

$f(-2,5) \cong -0,4 < 0$

$f(-2) \cong 0,1 > 0$

$f(-2)\times f(-2,5) < 0 \Rightarrow -2,5 < \alpha < -2$

5)



6a) $f(x) = x+2+e^x$

$\Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + e^x + c$

$F(0) = 1 + c = 0 \Rightarrow c = -1$

$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + e^x - 1$

b) $A(\alpha) = \int_\alpha^0 f(x)dx = [F(x)]_\alpha^0 = F(0) - F(\alpha) = -F(\alpha)$

$A(\alpha) = -F(\alpha)$

$A(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha - e^\alpha + 1$

D'après l'équation f $(\alpha) = 0$ on a $\alpha + 2 + e^\alpha = 0$ $\Rightarrow$

$$e^{\alpha} = -\alpha - 2$$

En remplaçant e^{α} par $-\alpha - 2$ on obtient :

$A(\alpha) \quad = -\frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha - e^{\alpha} + 1$

$= -\frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha - (-\alpha - 2) + 1$

$= -\frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha + \alpha + 2 + 1$

$= -\frac{\alpha^2}{2} - \alpha + 3$

$$A(\alpha) = \frac{6 - 2\alpha - \alpha^2}{2}$$

7a) $f'(\alpha) = e^{\alpha} + 1$

$\qquad = -\alpha - 2 + 1$

$f'(\alpha) = -\alpha - 1$

$f'(\alpha) = -(\alpha + 1)$

$y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$

$y = -(\alpha + 1)(x - \alpha)$

$y = -(\alpha + 1)x + \alpha(\alpha + 1)$

b) $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)}$

$\qquad = \frac{1}{f'(\alpha)}$

$\qquad = \frac{1}{-(\alpha+1)}$

$(f^{-1})'(0) = -\frac{1}{\alpha+1}$

8) $g(x) = \ln(f(x))$

a) g est définie ssi $x + 2 + e^{x} > 0$

$\Rightarrow$ g est définie ssi $f(x) > 0$

et f est strictement positif sur $]\alpha, +\infty[$ d'où $D_g =]\alpha, +\infty[$

b) $\lim_{x \to \alpha^+} g(x) = \lim_{x \to \alpha^+} \ln f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln f(x) = +\infty$

$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} > 0$ g est strictement croissante sur $]\alpha, +\infty[$

TV de g

x	α		$+\infty$
g'(x)		+	
g(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+2+e^{x})}{x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(e^{x}\left(\frac{x}{e^{x}} + \frac{2}{e^{x}} + 1\right)\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln e^x}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}+1\right)}{x} = 1 \quad \text{On a } \left(\ln e^x = x \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{et } \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$$

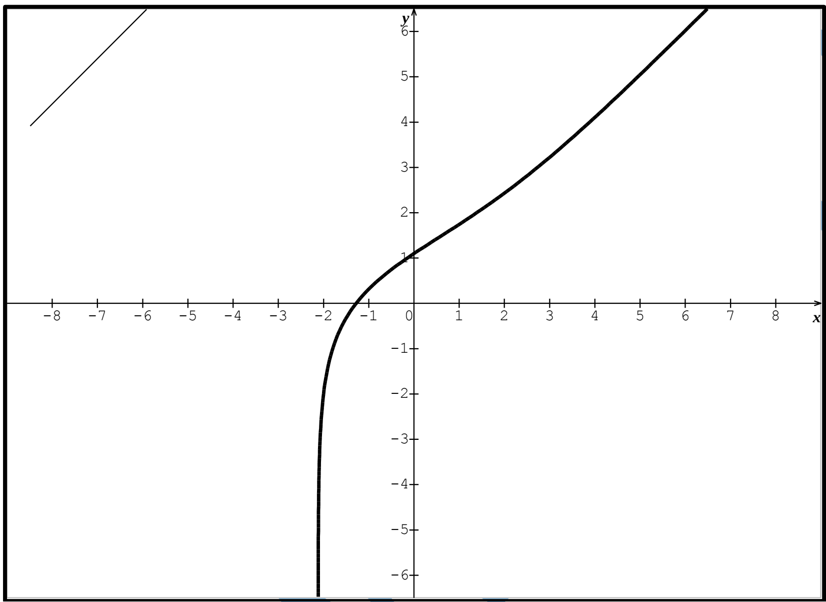
$$\lim_{x\to+\infty} (g(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} (\ln(x + 2 + e^x) - x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (\ln(x + 2 + e^x) - \ln e^x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+2+e^x}{e^x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} + 1\right) = 0$$

$\lim_{x\to+\infty} (g(x) - x) = 0 \Rightarrow$ **La courbe(Γ) de g admet une asymptote oblique d'équation** $y = x$



BAC 2010
Session Compl.

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2010 session Complémentaire

Exercice 1 (3 points)

pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	(U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et telle que U_5=17 alors :	U_{10} =34	U_{10} =32	U_{10} =85
2	(U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 10$ et de premier terme $U_0 = \frac{11}{2}$ si $U_0 + U_1 + \cdots + U_n = 2010$ alors :	$n = 19$	$n = 20$	$n = 21$
3	Si $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$ alors :	$s_n = 1 - 2^n$	$s_n = 2^{n+1} - 1$	$s_n = 2^n - 1$
4	La suite de terme général $U_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^2}$	Converge vers 1	Ne converge pas	Converge vers 0
5	La suite de terme général $U_n = \frac{10^n}{n!}$	Croissante	Décroissante	Non monotone
6	Sooient (U_n) et (U_n) deux suite numériques telles que $U_n \leq v_n$ .Si (U_n) est croissante	(U_n) est bornée	(V_n) est bornée	(V_n) est divergente

Recopie sur la feuille et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse.

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (4 points)

1 .Résoudre dans C l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 4z + 13 = 0$ et soient z_1 et z_2 ses solutions telles que $I_m(z_1) > 0$.

2 .On considère dans le plan complexe les points A et B d'affixes respectives :
z_A=1+ z_1 et z_B=i+ z_2

a) Écrire les nombres z_A et z_B sous forme algébrique et trigonométrique

b) Représenter dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les points A et B. Déterminer la nature du triangle OAB.

c) Déterminer et placer le point C tel que le quadrilatère OACB soit un parallélogramme.

d) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan d'affixe z tel que le complexe $\frac{z-2+2i}{z-3-3i}$ soit imaginaire.

Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm .

1a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \ln x)$ et interpréter graphiquement

2a) Calculer $f'(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f
b) Dresser le tableau de variation de f
3a) Dresser le tableau de variation de ln :$(x \to lnx)$
b) Tracer les courbes (C) et Γ représentative de f et ln dans le repère($O; \vec{i}, \vec{j}$)
4. Soit h la restriction de f sur $I =]1, +\infty[$
a)Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.
b) Soit C' la courbe de représentative de h^{-1} dans le repère($O; \vec{i}, \vec{j}$).Etudier la position de (C') avec sa tangente au point d'abscisse$x_0 = 1$
c) Construire (C') repère($O; \vec{i}, \vec{j}$)
5a) Calculer$A = \int_1^e lnxdx$ (on pourra utiliser une intégration par parties)
b) En déduire l'aire S du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisse et les droites d'équations respectives$x = 1$ et $x = e$

Exercice 4 (7 points)

On considère la fonction numérique f définie $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm
1a) Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x), \lim_{x \to 0^-} f(x), \lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
b) En déduire que la courbe (C) possède trois asymptotes dont on donnera des équations
2a) Calculer la dérivée de la fonction f et vérifier que pour tout x non nul : $f'(x) = -\frac{f(x)}{e^x - 1}$
b) Dresser le tableau de variation de f
3a) Montrer que la fonction g restriction de f sur $I =]0, +\infty[$ réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.
b) Déterminer l'expression de la réciproque g^{-1} de g
4a) Montrer que la courbe (C) possède le point $\Omega\left(0, \frac{1}{2}\right)$ comme centre de symétrie
b) Construire les courbes (C) et (C') représentatives des fonctions f et g^{-1} dans le repère($O; \vec{i}, \vec{j}$)
5a) Déterminer une primitive F de f sur $I =]0, +\infty[$
b) Soit n un entier naturel , $n \geq 1$,U_n l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{n}$ et $x = 1$ calculer U_n en fonction de n
c) Calculer et interpréter graphiquement $\lim_{n \to +\infty} U_n$

Fin

Corrigé baccalauréat 2010 session complémentaire

Exercice 1 :

N°	1	2	3	4	5	6
Réponse exacte	B	A	B	C	C	A

Exercice 2 :

1° Résolution de : $z^2-4z+13=0$. $\Delta'=(-2)^2-1\times 13=-9=(3i)^2$; $z_1=2+3i$ et $z_2=2-3i$.

2° a) $z_A=1+z_1=1+2+3i=3(1+i)=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

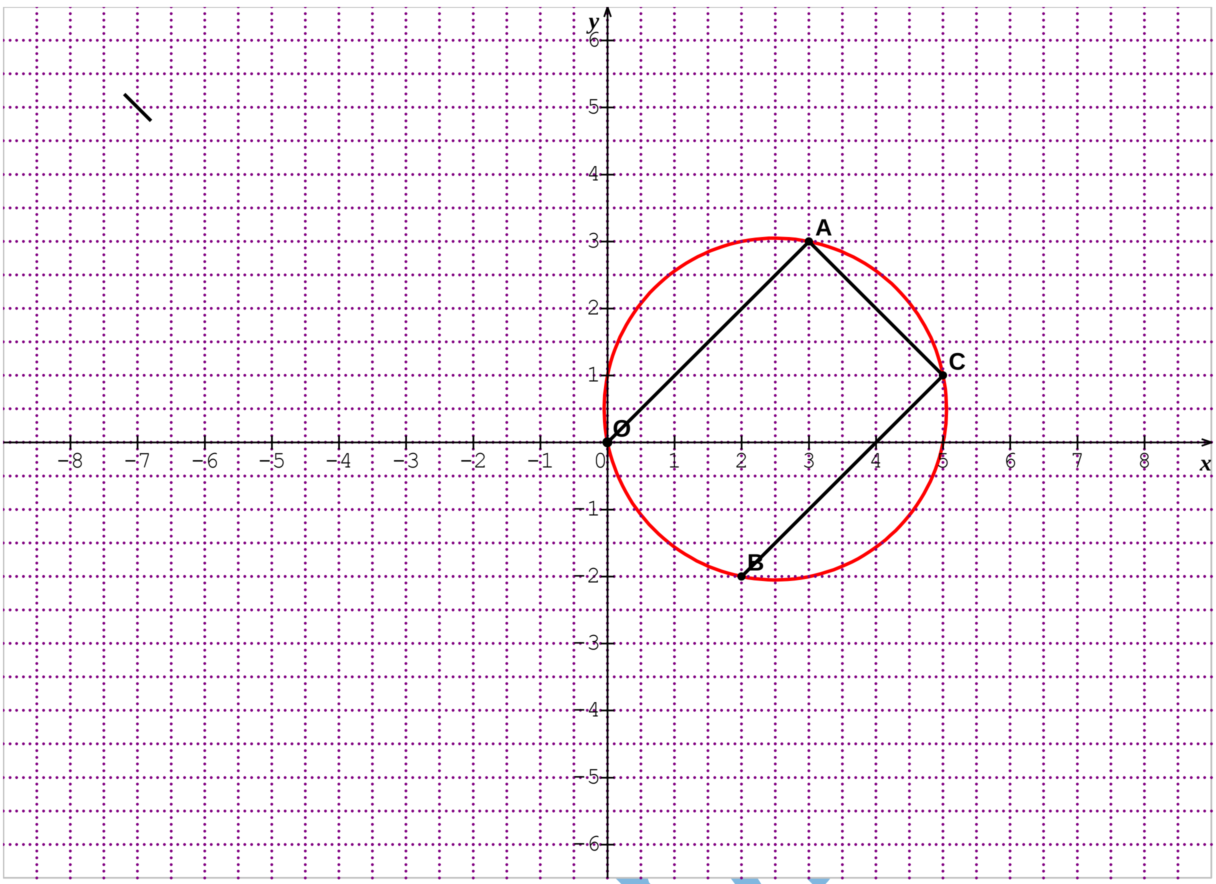
$z_B=i+z_2=i+2-3i=2(1-i)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

b) .On remarque que : $\frac{z_A}{z_B}=\frac{z_A-z_O}{z_B-z_O}=\frac{3(1+i)}{2(1-i)}=\frac{3}{2}i$ donc $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Le triangle OAB est rectangle en O.

c) .Le quadrilatère OACB est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$ $z_C-z_A=z_B \Leftrightarrow z_C=z_A+z_B=3+3i+2-2i=5+i$

- $\frac{z-2+2i}{z-3-3i}=\frac{z-z_B}{z-z_A}$ donc $\frac{z-2+2i}{z-3-3i}\in(i\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{z-2+2i}{z-3-3i}=0\\ \text{ou}\\ \arg\frac{z-2+2i}{z-3-3i}=\frac{\pi}{2}\ [\pi]\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}M=B\\ \text{ou}\\ \left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}\ [\pi]\end{cases}$. L'ensemble est le cercle de diamètre $[AB]$, privé du point A.



Exercice 3 :

La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$.

1° a) On a : $f(x)=\frac{1+x\ln x}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$. La droite d'équation : $x=0$ est une asymptote verticale.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Les courbes de f et de $\ln x$ sont voisines en $+\infty$, c'est-à-dire que la branche infinie de (C), en $+\infty$, est de direction (Ox).

2° a) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-1+x}{x^2}$.

b) $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$; $f(1)=1$

Le TV de f :

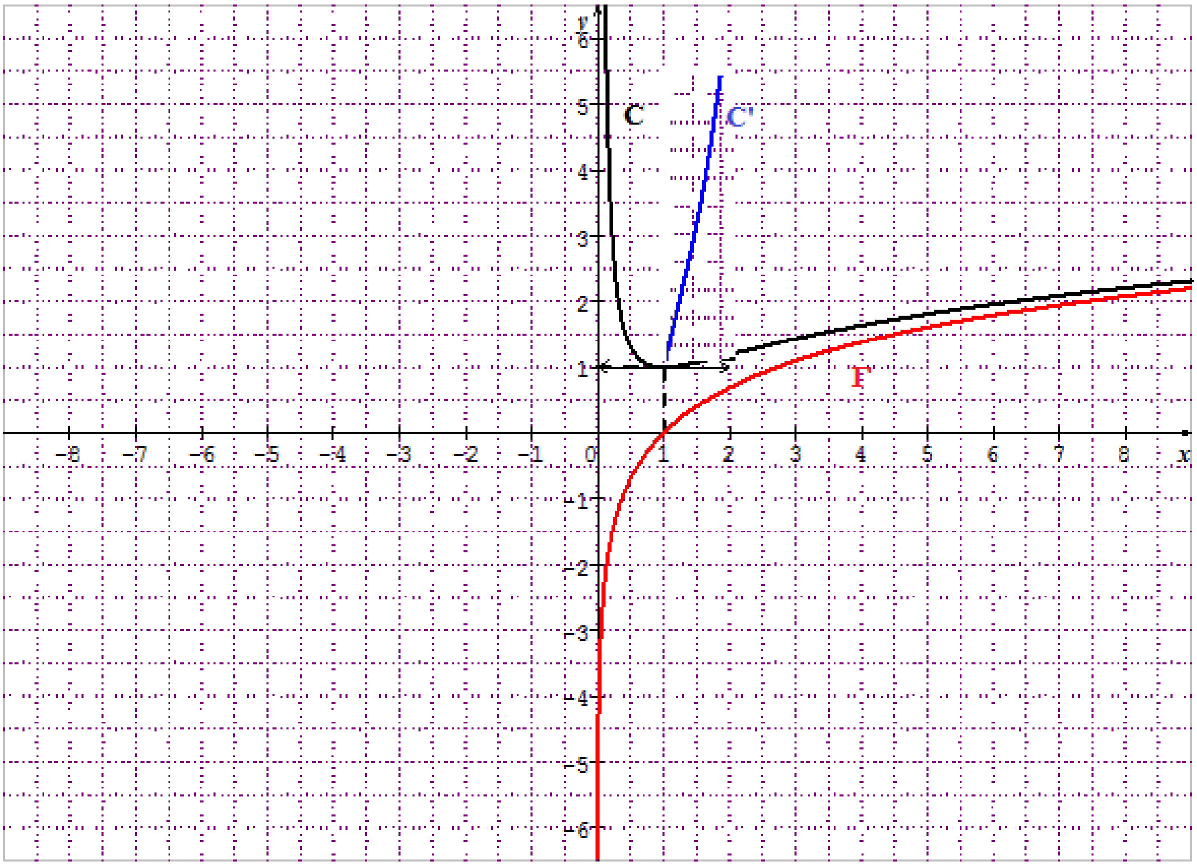
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ 0

3° a)Le TV de f :

x	0	$+\infty$

$1/x$		+
$\ln x$		$-\infty$ ↗ $+\infty$

b) Représentation de (C)



3° a) La restriction h de f , à l'intervalle $[1;+\infty[$, est continue et strictement décroissante donc réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur $]0;1]$.

b) Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $x=1$ donc verticale. La courbe (C') est à droite de cette tangente.

c) Pour le tracé de (C'), voir figure.

5° a) Soit $\int_1^e \ln x dx$. On procède par intégration par parties en posant : $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\ln x \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$. $\int_1^e \ln x dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e dx = e-[x]_1^e = e-e+1=1$.

b) L'aire demandée est $S=\int_1^e f(t)dt = \int_1^e \dfrac{1}{t}dt + \int_1^e \ln t dt = [\ln t]_1^e + 1 = 2$.

Exercice 4 :

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$.

1° a) Le signe de e^x-1 est :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
e^x-1	$-$ 0 $+$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x}{e^x-1}="\dfrac{1}{0^-}"=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{e^x-1}="\dfrac{1}{0^+}"=+\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}="\dfrac{0}{-1}"=0$;

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{1-e^{-x}}=1$

b) La courbe (C) possède trois asymptotes, à savoir : La droite d'équation : $x=0$ une asymptote verticale, les droites d'équations : $y=0$ et $y=1$ des asymptotes horizontales respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

.2° a) $f'(x)=\dfrac{e^x(e^x-1)-e^x\times e^x}{(e^x-1)^2}=-\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}=-\dfrac{e^x}{e^x-1}\times\dfrac{1}{e^x-1}=-\dfrac{f(x)}{e^x-1}$.

b) Le TV de f :

x	$-\infty$	0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$			$-$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$			$+\infty \searrow 1$

3° a) La restriction g de f, à l'intervalle $]0;+\infty[$, est continue et strictement décroissante donc réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $J=]1;+\infty[$.

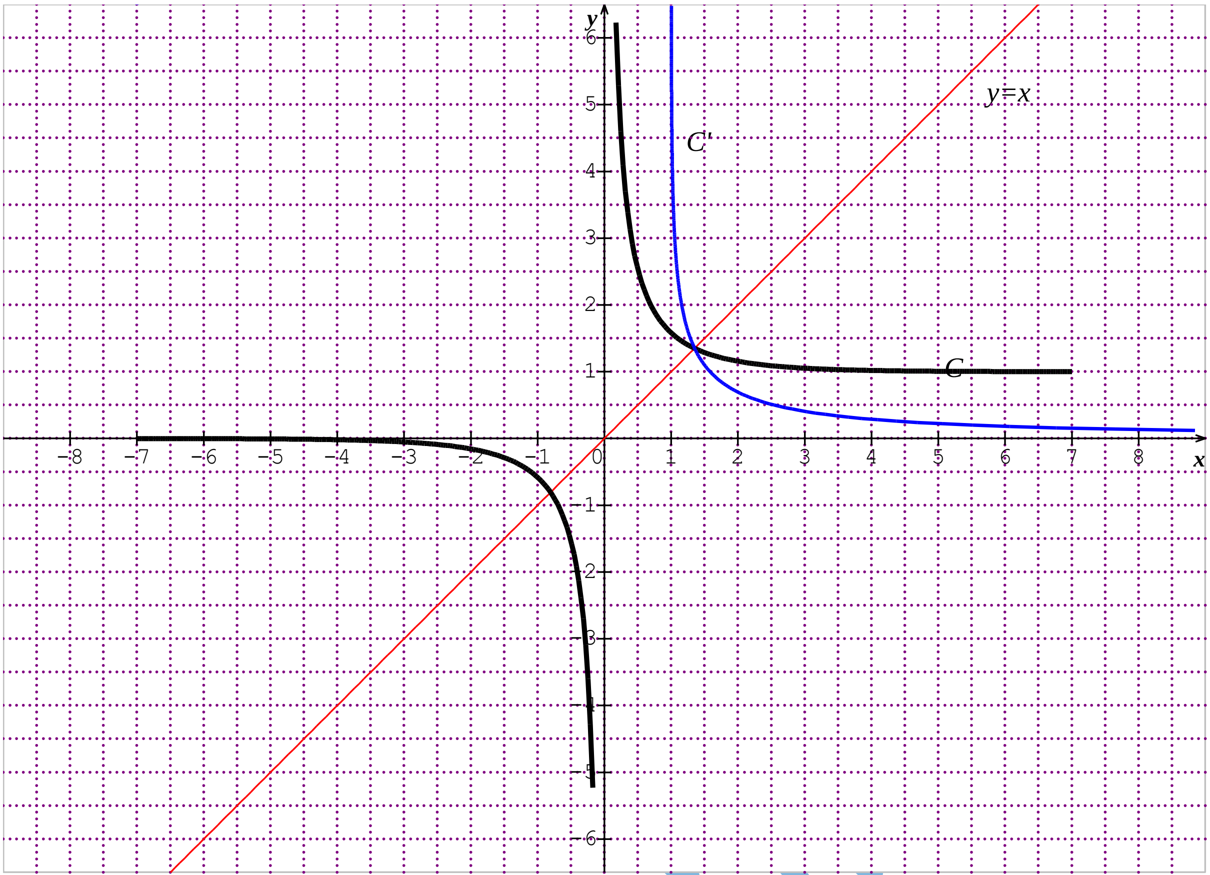
b) Soit $x\in J$ et $t\in I$ tels que $g(t)=x$ alors $g^{-1}(x)=t$.

$g(t)=\dfrac{e^t}{e^t-1}=x \Leftrightarrow xe^t-x=e^t \Leftrightarrow (x-1)e^t=x \Leftrightarrow e^t=\dfrac{x}{x-1} \Leftrightarrow t=\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.L'expression de g^{-1} est : $\forall x\in J$, $g^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

4° a) $\Omega\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie si, $f(2\times 0-x)+f(x)=2\times\dfrac{1}{2}$ $\quad(1)$.

$f(-x)+f(x)=\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}-1}+\dfrac{e^x}{e^x-1}=-\dfrac{1}{e^x-1}+\dfrac{e^x}{e^x-1}=\dfrac{e^x-1}{e^x-1}=1$, donc (1) est vérifié et par suite $\Omega\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C).

b) Tracés :



5° a) Pour $x \in I$, f est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=e^{x}-1$. Une primitive de f est : $F(x)=\ln(e^{x}-1)$.

b) $U_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx=[F(x)]_{\frac{1}{n}}^{1}=F(1)-F\left(\frac{1}{n}\right)=\ln(e-1)-\ln\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)=\ln\left(\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)=0^{+}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}\right)=+\infty$. La limite de (U_n) est l'aire du domaine plan limité par (C), (Ox), (Oy) et la droite : $x=1$.

BAC 2011
Session Normale

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2011 session Normale

Exercice 1 (3points)

Un groupe d'élèves est composé de 3 garçons et de 4filles. Les noms de ces sept élèves sont inscrits sur des jetons indiscernables au touché et placés dans une enveloppe.
A chaque cours de mathématiques, le professeur tire au hasard un jeton et interroge l'élève concerné .Durant une semaine, il y'a 6cours de mathématiques. On appelle X la variable aléatoire définie par « X est égale au nombre de fois où le professeur interroge une fille durant cette semaine». On considère les événements :
A : Le professeur interroge exactement cinq garçons.
B : Une fille au moins est interrogée durant la semaine.
Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	La probabilité, à un cours donné, que l'élève interrogé soit un garçon est :	$\frac{3}{7}$	C_7^3	A_7^3
2	La probabilité, à un cours donné, que l'élève interrogée soit une fille est :	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{7}$
3	L'ensemble des valeurs de X est :	$\{0,1,2,\ldots\ldots,7\}$	$\{0,1,2,\ldots\ldots,6\}$	$\{0,1,2,3,4\}$
4	La probabilité de l'événement A est :	$\left(\frac{3}{7}\right)^5$	$C_6^5\left(\frac{3}{7}\right)^5\left(\frac{4}{7}\right)$	$\left(\frac{4}{7}\right)^5\left(\frac{3}{7}\right)$
5	La probabilité de l'événement B est :	$1-\left(\frac{3}{7}\right)^6$	$1-\left(\frac{4}{7}\right)^5$	$\frac{4}{7}$
6	Le nombre de filles interrogées durant la semaine, que l'on peut espérer est :	2	3	4

Recopie sur la feuille et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse.

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice (5points)

1. On pose $(z) = z^3 - 5z^2 + 12z - 8$.
a) Calculer $p(1)$
b) Déterminer a et b tels que : tels que pour tout z on a $p(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$
c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $p(z) = 0$
2. On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal (O ;$\vec{u},\vec{v}$)
Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_1 = 1$, $z_2 = 2+2i$ et $z_3 = 2-2i$
a) Calculer le module et un argument de chacun des nombres z_1 , z_2 et z_3
b) Placer les points A, B et C dans le repère (O ;$\vec{u},\vec{v}$)
3a) Écrire le nombre $\frac{z_2}{z_3}$ sous forme algébrique .En déduire la nature du triangle OBC.
b) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que $\left|\frac{z-1}{z-2-2i}\right| = 1$

Exercice (5points)

Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = (x + 2)e^{x}$

Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;$\vec{i},\vec{j}$) unité 1cm.

1. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.

2. Calculer $f'(x)$et dresser le tableau de variation de f.

3. Déterminer les points d'intersections de C avec l'axe des coordonnées puis construire (C) dans le repère (O ;$\vec{i},\vec{j}$).

4a) Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = f(x) + e^{x}$.

En déduire une primitive de f sur

b) Calculer l'aire S du domaine plan délimité par la courbe (C) et les axes des coordonnées.

5. On définit une suite numérique (U_n)par son terme général : $U_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$;$n \geq 1$

a) CalculerU_1 et U_2 .

Montrer que (U_n) est décroissante (on pourra utiliser les variations de f).

b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 4 (7points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x - 1 + \frac{1+lnx}{x}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;$\vec{i},\vec{j}$) unité 1cm.

1a) Montrer que $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ et interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Montrer que la droite Δd'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C).

c) Étudier la position relative de (C) et Δ

2) On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$:$g(x) = x^2 - lnx$

a)vérifier que $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)= \frac{1+ln2}{2}$

b) Calculer $g'(x)$

c) Étudier les variations de g et montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$:$g(x) > 0$

3a) Calculer $f'(x)$et vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$on a :$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

4a) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.vérifier que$\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$.

5a) Préciser les points de la courbe (C) en lesquels la tangente (T) est parallèle àΔ.

b) Représenter la courbe (C) et les droites Δ et (T) dans (O ;$\vec{i},\vec{j}$).

c) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation $(m + 1)x - 1 - lnx = 0$

6) Soit n un entier naturel, $n \geq 1$ .On note U_n l'aire du domaine plan délimitée par la courbe (C) l'asymptote oblique Δ et les droites d'équations respectives $x = n$ et $x = n + 1$

a) ExprimerU_n en fonction de n

b) Calculer et interpréter graphiquement $\lim_{n\to+\infty} U_n$

Fin

Corrigé baccalauréat 2011 session Normale

Exercice 1

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse	A	C	B	B	A	B

Exercice 2

$P(z) = z^3 - 5z^2 + 12z - 8.$

1 a) $p(1) = 1 - 5 + 12 - 8$

$= 13 - 13$

$p(1) = 0$

b) $p(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$

$= z^3 + az^2 + bz - z^2 - az - b$

$= z^3 + (a-1)z^2 + (b-a)z - b$

$$\begin{cases} a - 1 = -5 \Rightarrow a = -4 \\ b - a = 12 \\ -b = -8 \Rightarrow b = 8 \end{cases}$$

$p(z) = (z-1)(z^2 - 4z + 8)$

c) $p(z) = 0 \Rightarrow (z-1)(z^2 - 4z + 8) = 0$

$\Rightarrow z - 1 = 0 \Rightarrow z_1 = 1$

Ou $z^2 - 4z + 8 = 0$

$\Delta = 16 - 32 = -16 = 16i^2$

$$z_2 = \frac{4 + 4i}{2} = 2 + 2i$$

$$z_3 = \frac{4 - 4i}{2} = 2 - 2i$$

$S = \{1, 2 + 2i, 2 - 2i\}$

2 $a)$ $z_1 = z_A = 1$

$z_2 = z_B = 2 + 2i$

$z_3 = z_C = 2 - 2i$

$|z_1| = 1$, $\arg z_1 = arg 1 = 0[2\pi]$

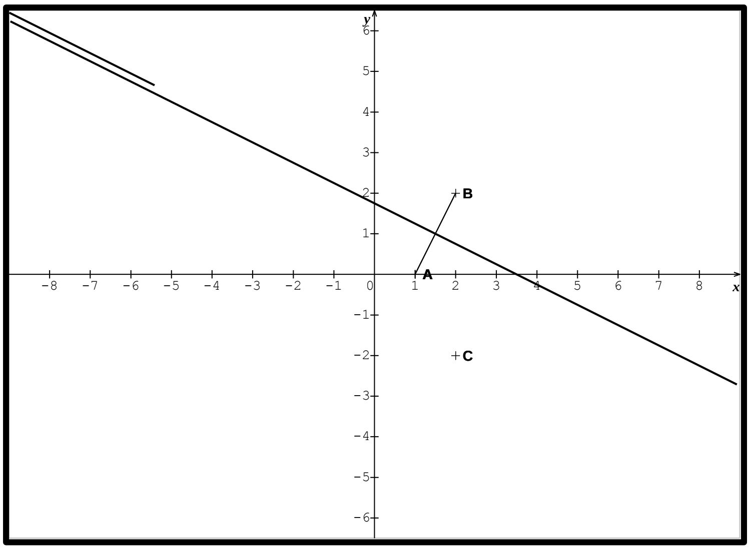
$|z_2| = |2 + 2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\arg z_2 = arg(2 + 2i) = \frac{\pi}{4}$

$|z_3| = |2 - 2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\arg z_3 = arg(2 - 2i) = -\frac{\pi}{4}$

b)



3a) $\frac{z_2}{z_3} = \frac{2+2i}{2-2i}$

$\frac{z_2}{z_3} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$= \frac{1+i+i-1}{2}$

$= \frac{2i}{2}$

$\frac{z_2}{z_3} = i \Rightarrow \left|\frac{z_2}{z_3}\right| = |i| = 1$

$\frac{z_2}{z_3} = i \Rightarrow \text{ Arg}\left(\frac{z_2}{z_3}\right) = arg\, i = \frac{\pi}{2}$

$\left|\frac{z_2}{z_3}\right| = \left|\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O}\right| = \frac{OB}{OC} = 1 \Rightarrow$ OB=OC

$\arg\left(\frac{z_2}{z_3}\right) = arg\, i = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2}$

donc le triangle OBC est isocèle rectangle en O

b) $\left|\frac{z-1}{z-2-2i}\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}\right| = 1$

$\Rightarrow \frac{AM}{BM} = 1$

$\Rightarrow \text{AM} = \text{BM}$

Γ est la médiatrice du $[AB]$

Exercice 3

$f(x) = (x+2)e^x$

$D_f = \mathbb{R}$

$1 - \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x + 2e^x) = 0$

$\Rightarrow y = 0$ **est une asymptote horizontale au voisinage de** $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x+2)e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x+2)e^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x+2)}{x} \times e^x = +\infty$

La courbe (C) admet une branche infinie de direction (OY) au voisinage de $+\infty$

2) $f'(x) = e^x + e^x(x+2)$

$= e^x(1+x+2)$

$f'(\text{x}) = (x+3)e^x$

$\text{e}^{\text{x}} > 0 \Rightarrow$ **Le signe de** $\text{f}'(\text{x})$ **est celui de** $x+3$

$f'(\text{x}) = 0 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3$

TV de f

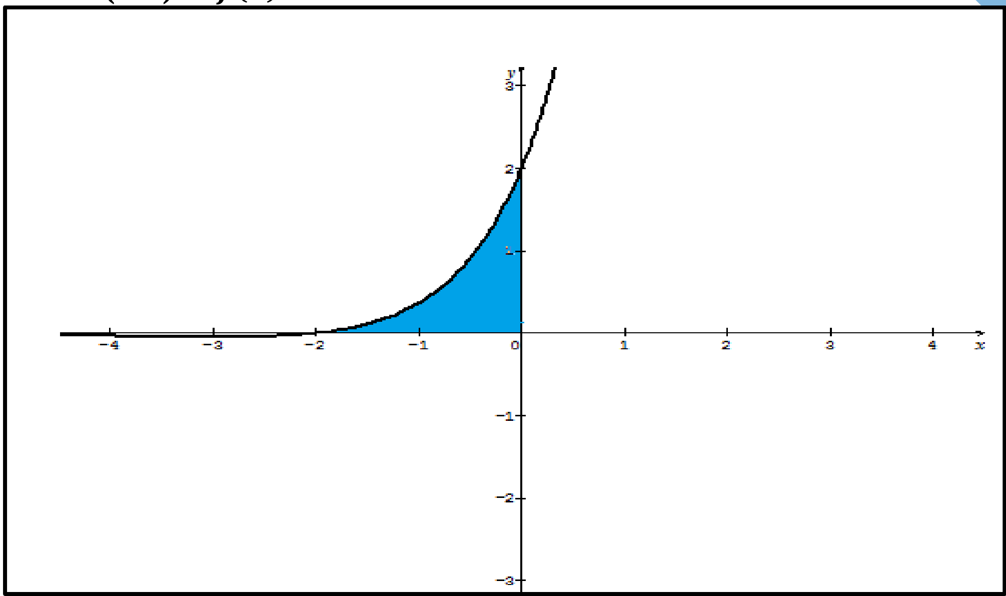
x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	
f(x)	0	$\searrow$	$-e^{-3}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-3) = -e^{-3}$

3- Intersection avec les axes

avec (OY) $\Rightarrow f(0) = 2$

avec (OX) $\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow$ **x+2=0** $\Rightarrow x = -2$



4-a) $f'(\text{x}) = e^x + e^x(x+2)$

$f'(\text{x}) = e^x + f(x)$

$\Rightarrow f(x) = e^x + F(x)$

$\Rightarrow F(x) = f(x) - e^x$

$F(x) = e^x(x+2) - e^x$

$= (x+2-1)e^x$

$F(x) = (x+1)e^x$

b) $S = \int_{-2}^{0} f(x)dx \times u.a$

S= $[F(x)]_{-2}^{0} \times cm^2$

S=F (0)−F (-2)

$S = (1+e^{-2})cm^2$

5 $a)$ $\text{U}_\text{n} = \text{f}\left(\frac{1}{n}\right)$ **;** $n \geq 1$

$\text{U}_1 = f(1) = 3e$

$\text{U}_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{e}$

sur $[0, +\infty[$ **f est croissante**

$n \geq 1$ **; on sait que :** $n+1 > n \Rightarrow$

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow f\left(\frac{1}{n+1}\right) < f\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n$

$\Rightarrow (U_n)$ **est décroissante**

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) = 2$

Exercice 4

$$f(x) = x - 1 + \frac{1 + lnx}{x}$$

1a) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x - 1 + \frac{1+lnx}{x}$

$$= \lim\limits_{x\to0^+} x - 1 + \frac{1}{x}(1 + lnx)$$

$$= 0 - 1 + (+\infty)(1 - \infty)$$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} \mathrm{f}(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ **est une asymptote verticale**

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x} = +\infty$ **puisque** $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0 \end{cases}$

Démontrons que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$

$$f(x) - y = x - 1 + \frac{1 + lnx}{x} - x + 1$$

$$f(x) - y = \frac{1 + lnx}{x}$$

$$f(x) - y = \frac{1 + lnx}{x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - y) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{lnx}{x}\right) = 0 \Rightarrow$ **Que la droite Δd'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$**

c) $f(x) - y = 0 \Rightarrow 1 + lnx = 0$

$\Rightarrow lnx = -1$

$\Rightarrow x = e^{-1}$

X	0		e^{-1}		$+\infty$
f(x)-y		−	0	+	
Position relative		Δ / C		C / Δ	

2) $g(x) = x^2 - lnx$

a)

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} + \ln\sqrt{2}$$

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$$

b) $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$

c) $x > 0$ Le signe de $g'(x)$ est celui du numérateur

$g'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Ou $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
g'(x)		−	0	+	
g(x)		↘	$\frac{1+\ln 2}{2}$	↗	

g admet un minimum positif donc g est positif

3a)

$$f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x} > 0$$

b) *TV de f*

x	0		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

4a) f est continue et strictement croissante de $]0,+\infty[$ vers J= $]-\infty,+\infty[$ donc f réalise une bijection

b) f est bijective de$]0,+\infty[$ vers J et 0∈ J donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α

$f\left(\frac{1}{e}\right) \cong -0,63 < 0$ *et* $f\left(\frac{1}{2}\right) \cong 0,11 > 0$

$f\left(\frac{1}{e}\right) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow \frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$

5a) (T) *est parallèle à D* $\Leftrightarrow f'(x) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - \ln x}{x^2} = 1$$

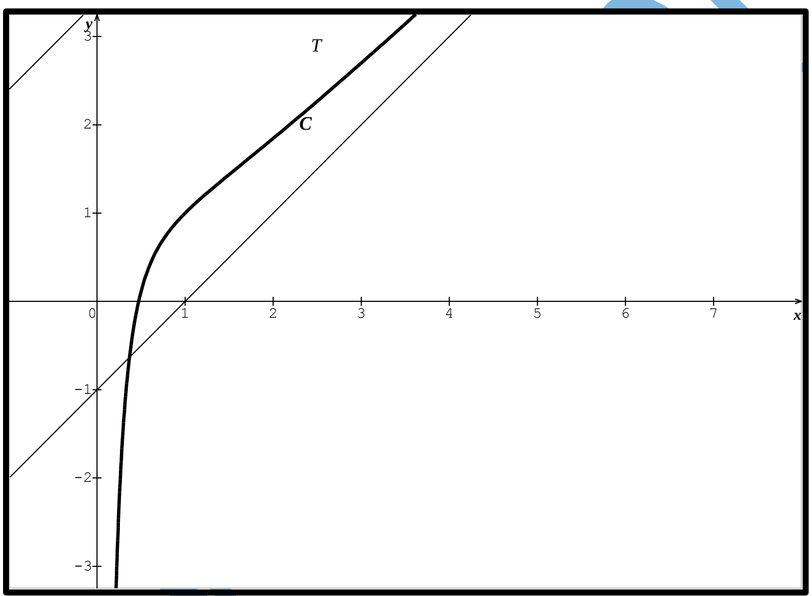
$$\Leftrightarrow x^2 - \ln x = x^2$$

$$\Leftrightarrow \ lnx = 0$$
$$\Leftrightarrow \ x = 1$$
La tangente est parallèle à D en $x_0 = 1$

c) $(m+1)x - 1 - lnx = 0$
$\Rightarrow mx + x - 1 - lnx = 0$
$\Rightarrow \ mx = -x+1+ln$
$\Rightarrow \ m = \frac{-x+1+lnx}{x}$
$\Rightarrow \ m = -1 + \frac{1+lnx}{x}$
$\Rightarrow x + \ m = x - 1 + \frac{1+lnx}{x}$
$\Rightarrow f(x) = x + m$
Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x + m$ sont les abscisses des points d'intersection entre la courbe C de f et la droite(D_m) d'équation $y = x + m$

$$\begin{cases} Si\ m \in \left]-\infty, -1\right] & l'\acute{e}quation\ admet\ une\ seule\ solution \\ si\ m \in \left]-1, 0\right[& l'\acute{e}quation\ admet\ 2 solutions \\ si\ m = 0 & l'\acute{e}quation\ admet\ 1 solution \\ Si\ m \in \left]0, +\infty\right[& l'\acute{e}quation\ n'admet\ aucune solution \end{cases}$$

b)



6 a) sur $]1, +\infty[$ la courbe C est situé en dessus de l'asymptote oblique

$$U_n = \int_n^{n+1} (f(x) - y)dx$$
$$= \int_n^{n+1} \frac{1}{x} \times (1 + lnx)dx$$
$$= \left[\frac{(1+lnx)^2}{2}\right]_n^{n+1}$$

$$=\frac{(1+ln(n+1))^2}{2}-\frac{(1+lnn)^2}{2}$$
$$=\frac{(1+ln(n+1)-1-lnn)(1+ln(n+1)+1+lnn)}{2}$$
$$=\frac{(ln(n+1)-lnn)(2+ln(n+1)+lnn)}{2}$$
$$U_n=\frac{ln\left(\frac{n+1}{n}\right)(2+ln(n^2+n))}{2}$$
$$\boxed{U_n=\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)(2+ln(n^2+n))}{2}}$$

$$b)\ U_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\times\frac{2+ln(n^2+n)}{n}\right)$$
$$U_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\times\frac{2+ln(n^2+n)}{n}\right)$$
$$U_n=\frac{1}{2}\times\left(\left(\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}}\right)\times\left(\frac{2}{n}+\frac{lnn}{n}+\frac{ln(n+1)}{n}\right)\right)$$
On pose $X=\frac{1}{n}$ *si* $n\to+\infty\Rightarrow\ X\to 0$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0,\ \lim_{n\to+\infty}\frac{ln\,n}{n}=0;\ \lim_{n\to+\infty}\frac{ln(n+1)}{n}=0$$
$$\lim_{n\to+\infty}U_n\Rightarrow=\frac{1}{2}\times\left(\left(\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)\left(\frac{2}{n}+\frac{lnn}{n}+\frac{ln(n+1)}{n}\right)\right)=0$$

Si n→ +∞ cette aire est nulle parceque la courbe C coincide avec l'asymptote oblique Δ

BAC 2011
Session Compl.

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2011 session Complémentaire

Exercice 1 (3 points)

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte

1) Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout x, réel $f(4-x)+f(x)=8$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$, soit (C) la courbe de f dans un repère orthonormé .

	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	La courbe (C) admet	Un centre de symétrie $\Omega(-2,4)$	Un centre de symétrie $\Omega(2,4)$	Un axe de symétrie d'équation x=2
2	La courbe (C) admet une asymptote d'équation	$x=5$	$Y=5$	*Y=5x*
3	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ égale	-5	*3*	-∞
4	Si f est strictement croissante sur l'intervalle $[2,+\infty[$,alors elle est	Croissante sur $\mathbb{R}$	Décroissante sur$]-\infty,2]$	Non monotone sur $\mathbb{R}$

2)Une usine produit des bouteilles de 75 cl d'eau minérale . Soit X la variable aléatoire ayant pour valeurs les quantités possibles d'eau dans une bouteille expérimentée en centilitre. On note p_i la probabilité que la quantité d'eau dans une bouteille soit x_i centilitres. On donne le tableau suivant :

x_i	74,8	74,9	75	75,1	75,2
p_i	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{1}{20}$

	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Si on choisit au hasard une bouteuille ,la probabilité qu'elle soit au moins 75 cl est :	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{4}$
2	L'espérance mathématique de la variable X est étale à	$75{,}001$	75	*74,99*

Recopie sur la feuille et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse.

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (4 points)

Pour tout nombre complexe z on pose $f(z)=z^2-2z$

1a) Calculer $f(a)$ et $f(b)$

b) En déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$,des équations $z^2-2z+2=0$ et $z^2-2z+4=0$

2. On pose $c=ab=(1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right)$

a) Écrire a et b sous forme trigonométrique et exponentielle.

b) Écrire a et b sous forme algébrique et exponentielle

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice 3 (4 points)

On définit une suite (U_n) pour tout entier naturel non nul n par : $U_n=\frac{n^2}{2^n}$

1.a) Calculer les termes : U_2 ; U_3 ; U_4 et U_5

b) Montrer que (U_n) est positive, non monotone et quelle est ni arithmétique, ni géométrique.

2.a)Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$

b) Prouver, pour tout entier naturel $n\geq 5$, on a : $0<\frac{U_{n+1}}{U_n}\leq\frac{3}{4}$

3.a) Déterminer le sens de variation de la suite (U_n) à partir du rang 5

b) Que peut –on en déduire pour la suite ?

4.a) Montrer que pour tout naturel $n\geq 5$, on a : $0<U_n<\frac{25}{32}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

.Exercice 3 (9 points)

Soit fla fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=2x-1+\ln x$

Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$d'unité 1cm

1. Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.

2.a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f

b) Démontrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera .

c) Dresser le tableau de variation de f^{-1} réciproque de f

3. Montrer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution α .Vérifier que $0,6<\alpha<0,7$

4a) Préciser les points de (C) en lequel s la tangente est parallèle à la droite d'équation y=3x

b) construire la courbe (C) .

5a) En utilisant une intégration par parties , calculer $\int_\alpha^1\ln t\,dt$

b) En déduire, en fonction de α , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=\alpha$ et $x=1$

6.On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x-1+2e^x$. Soit Γ sa courbe représentative dans le repère précédant

a) En utilisant le tableau de variation de f, dresser le tableau de variation de g.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(g(x)-(x-1)\right)$ et interpréter graphiquement.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.

d) Déterminer en fonction de α l'abscisse du point d'intersection de la courbe Γ de g avec l'axe des abscisses

e) Construire Γ

d) Déterminer en fonction de α l'abscisse du point d'intersection de la courbe Г de g avec l'axe des abscisses

e) Construire Г

Fin

Corrigé baccalauréat 2011session Complémentaire

Exercice 1 :

N°	1	2	3	4	5	6
Réponse exacte	B	A	B	C	C	A

Exercice 2 :

1° a) On a ; $f(z)=z^2-2z$; $f(a)=(1+i)^2-2(1+i)=2i-2-2i=-2$.

$f(b)=\left(1+i\sqrt{3}\right)^2-2\left(1+i\sqrt{3}\right)=1+2i\sqrt{3}-3-2-2i\sqrt{3}=-4$

b) On a : $z^2-2z+2=0\Leftrightarrow f(z)=z^2-2z=-2=f(a)$. Les solutions sont donc $a=1+i$ et $\bar{a}=1-i$. On a : $z^2-2z+4=0\Leftrightarrow f(z)=z^2-2z=-4=f(b)$. Les solutions sont donc $b=1+i\sqrt{3}$ et $\bar{b}=1-i\sqrt{3}$.

2° $a=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$;

$b=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

4° $c=(1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right)=a\times b$

a) $c=(1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right)=1+i+i\sqrt{3}-\sqrt{3}=1-\sqrt{3}+i\left(1+\sqrt{3}\right)$.

b) On a $|c|=|a|\times|b|=2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$; $\arg c=\arg a+\arg b=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$. Alors :

$c=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)=2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

c) Par identification des deux écritures de c on trouve :

$$\begin{cases}2\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{12}=1-\sqrt{3}\\ 2\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{12}=1+\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\ \sin\frac{7\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ \sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

Exercice 3

1a) $U_n=\frac{n^2}{2^n}$

$U_2=\frac{2^2}{2^2}=1$

$U_3=\frac{3^2}{2^3}=\frac{9}{8}$

$\mathrm{U}_4=\frac{4^2}{2^4}=\frac{16}{16}=1$

$\mathrm{U}_5=\frac{5^2}{2^5}=\frac{25}{32}$

b) $\begin{cases} n^2>0 \\ 2^n>0 \end{cases} \Rightarrow \frac{n^2}{2^n}>0 \Rightarrow U_n>0$

$\mathrm{U}_2<\mathrm{U}_3>\mathrm{U}_4>\mathrm{U}_5 \Rightarrow (U_n)$ **n'est pas monotone**

$(\mathrm{U}_3)^2=\left(\frac{9}{8}\right)^2=\frac{81}{64}$

$u_2\times u_4=1\times 1=1$

$\begin{cases} (\mathrm{U}_3)^2=\frac{81}{64} \\ u_2\times u_4=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(\mathrm{U}_3)^2\neq \mathrm{u}_2\times \mathrm{u}_4}$

$\Rightarrow (u_n)$ **n'est pas une suite géométrique**

$u_2+u_4=1+1=2$

$2\times \mathrm{U}_3=2\times\frac{9}{8}=\frac{9}{4}$

$\begin{cases} u_2+u_4=2 \\ 2\times \mathrm{U}_3=\frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathrm{u}_2+\mathrm{u}_4\neq 2\times \mathrm{U}_3}$

$\Rightarrow$ (u_n) **n'est pas une suite arithmétique**

2a)

$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}$

$=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\times\frac{2^n}{n^2}$

$=\frac{(n+1)^2}{2\times 2^n}\times\frac{2^n}{n^2}$

$\frac{\mathrm{U}_{n+1}}{\mathrm{U}_n}=\frac{(n+1)^2}{2n^2}$

b) $n\geq 5\Rightarrow$

$\frac{1}{n}\leq\frac{1}{5}\Rightarrow$

$1+\frac{1}{n}\leq 1+\frac{1}{5}\Rightarrow$

$1+\frac{1}{n}\leq\frac{6}{5}\Rightarrow$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\leq\frac{36}{25}\Rightarrow$

$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\leq\frac{1}{2}\times\frac{36}{25}\Rightarrow$

$0<\frac{\mathrm{U}_{n+1}}{\mathrm{U}_n}\leq\frac{1}{2}\times\frac{36}{25}\Rightarrow$

$$0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} \le \frac{18}{25} < \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} < \frac{3}{4}}$$

3a) on

$0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} < \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow$

$0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1 \Rightarrow U_{n+1} < U_n$

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n < 0$

$\Rightarrow (U_n)$ **est décroissante à partir du rang 5**

b) (U_n) **est décroissante à partir du rang 5 et minorée par zéro donc elle est convergente**

4a) $0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} < \frac{3}{4}$

$\Rightarrow U_{n+1} < \frac{3}{4} U_n$

On effectue (n-5) relations à partir de $n = 5$

$$\begin{cases} U_6 < \frac{3}{4} U_5 \\ U_7 < \frac{3}{4} U_6 \\ \vdots \\ U_n < \frac{3}{4} U_{n-1} \end{cases}$$

$\Rightarrow 0 < U_n < \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} U_5$

$\Rightarrow \boxed{0 < U_n < \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \times \frac{25}{32}}$

b) $0 < U_n < \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \times \frac{25}{32}$

$\Rightarrow 0 < \lim\limits_{n\to+\infty} U_n < \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \times \frac{25}{32}$

$\Rightarrow 0 < \lim\limits_{n\to+\infty} U_n < 0$

D'après le théorème du gendarme $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

Exercice 4 :

f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = 2x - 1 + \ln x$

1° On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} (2x-1) = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$. La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale de la courbe (C). On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = 1$. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = 2$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-1 + \ln x) = +\infty$. La branche infinie de (C), en $+\infty$, a une direction parallèle à celle de la droite d'équation $y = 2x$.

2° a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = 2 + \frac{1}{x} > 0$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

b) f est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $J = \mathbb{R}$.

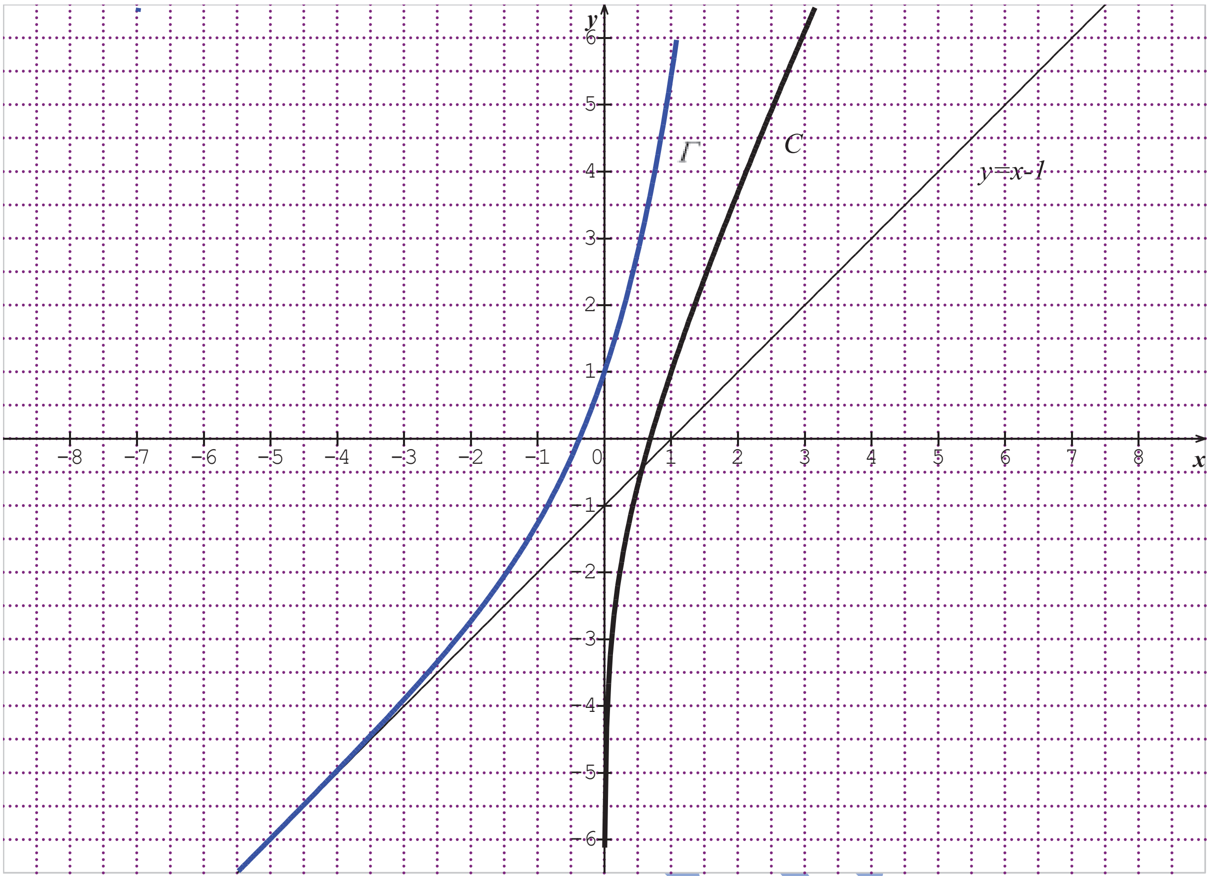
Le TV de f^{-1}

x	$-\infty$	$+\infty$
$(f^{-1})'(x)$	$+$	
$f^{-1}(x)$	$0 \nearrow +\infty$	

c) f étant une bijection de $]0;+\infty[$ sur $J = \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α. On a : $f(0,6) \times f(0,7) < 0$ donc $0,6 < \alpha < 0,7$.

4° a) Une tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 3x$ si et seulement s'il existe $x \in]0;+\infty[$ tel que : $f'(x) = 3$. $f'(x) = 3 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$. Il existe un seul point en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 3x$, c'est le point d'abscisse 1.

b) Tracé de (C) et Γ.



5° a) Soit $\int_{\alpha}^{1}\ln x\,dx$. On procède par intégration par parties en posant : $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\ln x \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$. $\int_{\alpha}^{1}\ln x\,dx=\left[x\ln x\right]_{\alpha}^{1}-\int_{\alpha}^{1}dx=-\alpha\ln\alpha-\left[x\right]_{\alpha}^{1}=-\alpha\ln\alpha-1+\alpha$

b) L'aire demandée est $A=\int_{\alpha}^{1}f(t)\,dt=\int_{\alpha}^{1}(2t-1+\ln t)\,dt \Leftrightarrow$

$A=\left[t^2-t\right]_{\alpha}^{1}+\int_{\alpha}^{1}\ln t\,dt=-\alpha^2+\alpha-\alpha\ln\alpha-1+\alpha=-\alpha^2+2\alpha-\alpha\ln\alpha-1$ ua .

6° g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x-1+2e^x$

a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=f'(x)\times e^x>0$. D'autre part : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+ \\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty \end{cases}$ donc

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ et $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(g(x)-(x-1)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}2e^x=0$. La droite d'équation : $y=x-1$ est une asymptote oblique de la courbe Γ.

c) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}+2\dfrac{e^x}{x}\right)=+\infty$. La branche infinie de Γ, en $+\infty$, est de direction (Ox)

d) $g(x)=0 \Leftrightarrow f(e^x)=0 \Leftrightarrow e^x=\alpha \Leftrightarrow x=\ln\alpha$

BAC 2012
Session Normale

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2012 session Normale

Exercice (3points)

Pour éclairer une salle, on utilise deux lampes différentes.
On note F l'événement : « la première lampes est défaillante »
On note G l'événement : « la deuxième lampes est défaillante »
Des études ont montré que : P(F) =0,2 ; P(G)=0,3 ; $P(F\cap G) = 0,1$
Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

1) La probabilité de l'événement « les deux lampes sont défaillantes » est :

A : 0,1	B : 0,5	C : 0,6

2) La probabilité de l'événement « au moins une des deux lampes est défaillante » est :

A : 0,9	B : 0,4	C : 0,6

3) La probabilité de l'événement « les deux lampes fonctionnent » est :

A : 0,8	B : 0,6	C : 0,5

4) La probabilité de l'événement «exactement une des deux lampes est défaillante » est :

A : 0,3	B : 0,4	C : 0,6

5) Sachant que la deuxième est défaillante, la probabilité que la première lampe fonctionne est :

A : $\frac{1}{2}$	B : $\frac{2}{3}$	C : $\frac{1}{3}$

6) On définit une variable aléatoire X égale au nombre de lampes défaillante dans la salle. L'espérance mathématique de X est :

A : 0,8	B : 0,6	C : 0,5

Recopie et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse.

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2(4points)

1- a- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation :
$z^2 - 4z + 5 = 0$ et soient $z_1$etz_2 ses solutions telles que $I_m(z_1) > 0$
b-Écrire le nombre $z_3 = i + z_1$ sous forme trigonométrique
2-Dans le plan complexe muni d'un repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = z_1$ et $z_B = -1 - i + z_2$
a- Placer les points A et B Déterminer la nature du triangle OAB
b-Déterminer l'affixe du point C tel que le quadrilatère OACB soit un parallélogramme placer le point C
3- Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1 - 2i$ on pose : $f(z) = \frac{z-2-i}{z-1+2i}$

a- Écrire sous forme algébrique le nombre $w = f(3-i)$ interpréter graphiquement
b-Déterminer puis construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$

c-Déterminer puis construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tels que le nombre $f(z)$ soit imaginaire pur

d-Déterminer puis construire l'ensemble Γ_3 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z) - 1| = \sqrt{10}$

Exercice 3 (6points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :$f(x) = e^{-2x-1} + 3x - 1$

(C) la courbe représentative dans un repère (O ;$\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

1a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (3x-1))$ interpréter graphiquement.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} - \infty$ interpréter graphiquement.

2a) Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β.
Vérifier que $-1,3 < \alpha < -1$ *et* $0,2 < \beta < 0,3$

b) Représenter la courbe (C)

4) On définit les suites (u_n)et (v_n) pour tout entier naturel n par : $u_n = e^{-2n-1}$ et $v_n = 3n - 1$

a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique décroissante.

b) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique croissante.

c) Les suites (u_n)et (v_n) sont-elles adjacentes ? Justifier.

5) Pour tout entier naturel n on pose :$S_n = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$

a) Calculer $S_n$en fonction de n

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n^2}$

Exercice 4 (7points)

Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x+1}{x+1} - ln(x+1)$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;$\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) unité 1cm.

1a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = -\infty$ interpréter graphiquement.

2a) Calculer $f'(x)$et vérifier que la courbe (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale dont on donnera une équation.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3a) Calculer $f''(x)$ et vérifier que la courbe (C) admet un point d'inflexion A d'abscisse1.

b) Écrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point A.

4a) Montrer que la restriction g de f sur I= $]0, +\infty[$ réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Dresser le tableau de variation deg^{-1}

c) Calculer$(g^{-1})'\left(\frac{3-2ln2}{2}\right)$

5a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β.
Vérifier que $-0,7 < \alpha < -0,6$ et$5,3 < \beta < 5,4$

b) Placer sur le repère (O ;$\vec{\imath}, \vec{\jmath}$), les points d'intersections de la courbe (C) avec les axes, son point d'inflexion, les tangentes précédentes puis représenter la courbe (C).

c) Représenter la courbe (C') deg^{-1}.

6.a) Montrer que la fonction f admet des primitives sur$]-1, +\infty[$.

b) Déterminer les réels a et b tels que la fonction $F(x) = ax - (x+b)ln(x+1)$ soit une primitive de f sur$]-1, +\infty[$.

c) Calculer, en fonction deβ, l'aire du domaine plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \beta$. Donner une valeur approchée de cette aire à 10^{-2} prés .

Corrigé baccalauréat 2012 session Normale

Exercice 1

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse	A	B	B	B	A	C

Exercice 2

1a) $z^2 - 4z + 5 = 0$

$\Delta = 16 - 20 = -4 = 4i^2$

$z_1 = \dfrac{4+2i}{2} = 2 + i$

$z_2 = \dfrac{4-2i}{2} = 2 - i$

b) $z_3 = i + z_1$

$= i + 2 + i$

$z_3 = 2 + 2i$

$|z_3| = |2+2i| = 2\sqrt{2}$

$\arg z_3 = arg(2+2i) = \frac{\pi}{4}$

$z_3 = 2\sqrt{2}(cos\dfrac{\pi}{4} + isin\dfrac{\pi}{4})$

2) $z_A = z_1 = 2 + i$

$z_B = -1 - i + z_2$

$= -1 - i + 2 - i$

$Z_B = 1 - 2i$

a)$A(2,1)$; $B(1,-2)$ Voir la représentation graphique

Démontrons que le triangle OAB est isocèle rectangle en O

On pose: K$= \frac{z_A - z_O}{z_B - z_O}$

$K = \dfrac{2+i}{1-2i}$

$= \dfrac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$

$= \dfrac{2+4i+i-2}{5}$

$= \dfrac{5i}{5}$

$K = i$

$$\begin{cases} |K| = 1 \Rightarrow \dfrac{OA}{OB} = 1 \\ argK = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ \text{le triangle OAB est isocèle rectangle en 0} \end{cases}$$

b) Le quadrilatère OACB est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$

$\Leftrightarrow z_C - z_B = z_A$

$$\Leftrightarrow z_C = z_A + z_B$$
$$\Leftrightarrow z_C = 2 + i + 1 - 2i$$
$$\Leftrightarrow z_C = 3 - i$$

3)

$$f(z) = \frac{z-2-i}{z-1+2i}$$

a) $w = f(3-i)$

$$= \frac{3-i-2-i}{3-i-1+2i}$$
$$= \frac{(1-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$
$$= \frac{2-i-4i-2}{5}$$
$$= \frac{-5i}{5}$$
$$w = -i$$
$$w = f(z_C) = f(3-i)$$
$$= \frac{3-i-2-i}{3-i-1+2i}$$
$$= \frac{3-i-(2+i)}{3-i-(1-2i)}$$
$$w = \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$$

$$\begin{cases} |w| = \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = \frac{AC}{BC} \\ arg w = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$ donc le triangle ABC est isocèle rectangle en C

b) Γ_1 $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-2-i}{z-1+2i}\right| = 1$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_B}\right| = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{AM}{BM} = 1$$
$$\Leftrightarrow AM = BM$$

$\Gamma_1$est la médiatrice du $[AB]$

c) Γ_2 *f(z)* est imaginaire pur $\Leftrightarrow \begin{cases} f(z) = 0 \\ arg(f(z)) = \frac{\pi}{2} \\ (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $[\pi]$

Γ_2 est le cercle de diamètre $[AB]$privé du point B

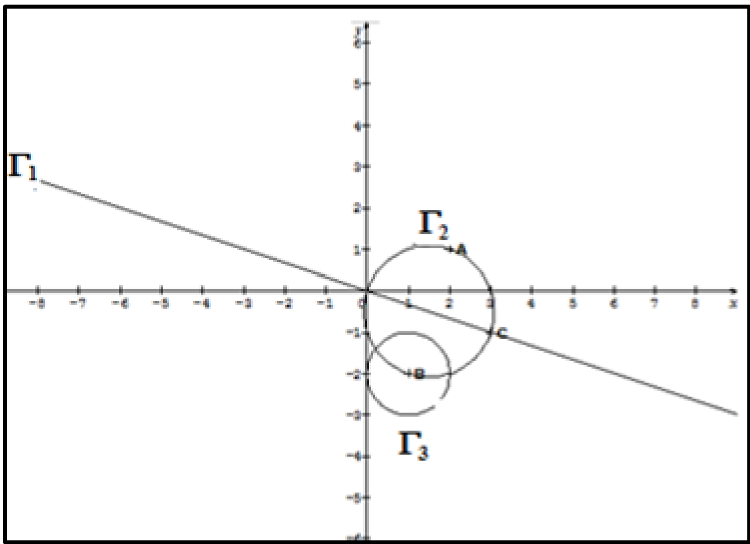
d) $[f(z) - 1] = \sqrt{10} \Leftrightarrow$

$$\left[\frac{z-2-i}{z-1+2i} - 1\right] = \sqrt{10} \Leftrightarrow$$
$$\left[\frac{z-2-i-z+1-2i}{z-1+2i}\right] = \sqrt{10} \Leftrightarrow$$
$$\left[\frac{-1-3i}{z-1+2i}\right] = \sqrt{10} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\sqrt{10}}{|z-1+2i|} = \sqrt{10} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{10}|z-1+2i| = \sqrt{10} \Leftrightarrow$$
$$|z-1+2i| = 1 \Leftrightarrow$$

$$|Z_M - Z_B| = 1 \Leftrightarrow$$

$$BM = 1$$

Γ_3Le cercle de centre B et de rayon 1



Corrigé l'Exercice3

$f(x) = e^{-2x-1} + 3x - 1$

1a- $D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x-1} + 3x - 1 = 0 - \infty - 1 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (3x-1)) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x-1} + 3x - 1 - 3x + 1$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{-2x-1} = 0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (3x-1)) = 0$

(C) admet une asymptote oblique d'équation $y = 3x - 1$au voisinage de $+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x-1} + 3x - 1 = +\infty - \infty - 1\ F.I$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{e^{2x+1}} + 3x - 1\right)$$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{xe^{2x+1}} + 3 - \frac{1}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{xe^{2x}e} + 3 - \frac{1}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(2e^{-1} \times \frac{1}{2xe^{2x}} + 3 - \frac{1}{x}\right)$

On pose $t = 2x$ si $x \to -\infty; t \to -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{t}{2}\left(2e^{-1} \times \frac{1}{te^t} + 3 - \frac{2}{t}\right)$ **On sait que** $\lim\limits_{x\to-\infty} te^t = 0^- \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{te^t} = -\infty$

$$= -\infty(-\infty + 3 - 0) = +\infty$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-2x-1}+3x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^{2x+1}}+3-\frac{1}{x}$$

$$=-\infty$$

(C) admet une branche infinie de direction (Oy) au voisinage de $-\infty$

2a)

$$f'(x)=-2e^{-2x-1}+3$$

$$=\frac{-2}{e^{2x+1}}+3$$

$$f'(x)=\frac{3e^{2x+1}-2}{e^{2x+1}}$$

$e^{2x+1}>0\Rightarrow$ **Le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur**

$$f'(x)=0\Rightarrow 3e^{2x+1}-2=0$$

$$\Rightarrow\ 3e^{2x+1}-2=0$$

$$\Rightarrow\ 3e^{2x+1}=2$$

$$\Rightarrow e^{2x+1}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 2x+1=ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 2x=-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$x=\frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}\cong-0,7$$

Signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		$\frac{-1+\ln(\frac{2}{3})}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

b) TV de f

x	$-\infty$		$\frac{-1+\ln(\frac{2}{3})}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1+\frac{3}{2}\ln(\frac{2}{3})$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}\right)=e^{-2\left(\frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}\right)-1}+3\times\frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}-1$$

$$=e^{1-ln\left(\frac{2}{3}\right)-1}+\frac{-3+3ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}-1$$

$$=e^{-ln\left(\frac{2}{3}\right)}+\frac{-3+3ln\left(\frac{2}{3}\right)-2}{2}$$

$= e^{ln\left(\frac{3}{2}\right)} + \dfrac{-5+3ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}$

$= \frac{3}{2} - \frac{5}{2} + \frac{3}{2}ln(\frac{2}{3})$

$f\left(\frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}\right) = -1 + \frac{3}{2}ln(\frac{2}{3})$

$f\left(\frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}\right) \approx 1,6$

3a) f **est continue et décroissante de** $\left]-\infty, \frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}\right]$ **vers** $\left[-1+\frac{3}{2}ln\left(\frac{2}{3}\right), +\infty\right[$ **et** f **change de signe une seule fois donc il existe un unique réel** $\alpha \in]0;1[$ **tel que** $f(\alpha) = 0$

$f(-1,3) > 0$, $f(-1,2) < 0 \Rightarrow f(-1,3) \times f(-1,2) < 0$

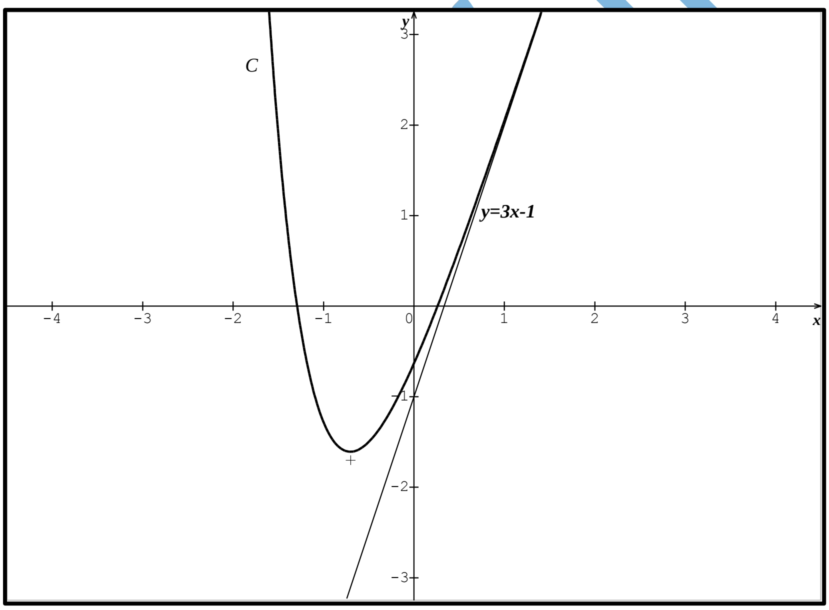
$\Rightarrow -1,3 < \alpha < -1,2$

f **est continue et croissante de** $\left[\frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}; +\infty\right[$ **vers** $\left[-1+\frac{3}{2}ln\left(\frac{2}{3}\right), +\infty\right[$ **et** f **change de signe une seule fois donc il existe un unique réel** $\beta \in \left[\frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}; +\infty\right[$ **tel que** $f(\beta) = 0$

$f(0,3) > 0$, $f(0,2) < 0 \Rightarrow f(0,3) \times f(0,2) < 0$

$\Rightarrow 0,2 < \beta < 0,3$

b)



4) $u_n = e^{-2n-1}$

a) $u_{n+1} = e^{-2(n+1)-1}$

$= e^{-2n-2-1}$

$= e^{-2} \times e^{-2n-1}$

$u_{n+1} = e^{-2} \times u_n$

La suite (u_n) **est une suite géométrique de raison** $q = e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1$

$u_n = e^{-2n-1} > 0$

Le premier terme de cette suite est positif et sa raison $q = e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1$ **, nous pouvons en déduire qu'elle est décroissante**

b) $v_n = 3n - 1$

$v_{n+1} = 3(n+1) - 1$

$= 3n + 3 - 1$

$= 3n - 1 + 3$

$v_{n+1} = v_n + 3$

La suite (v_n) **est une suite arithmétique de raison** $r = 3 > 0$

La raison de la suite arithmétique est positif nous pouvons en déduire qu'elle est croissante.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-2n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{2n+1}} = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 3n + 1 = +\infty$

les suites (u_n) **et** v_n **ne sont pas adjacentes puisque** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

$5a) f(n) = e^{-2n-1} + 3n - 1 = u_n + v_n$

$S_n = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$

$S_n = u_0 + v_0 + u_1 + v_1 + \cdots .. + u_n + v_n$

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots .. + u_n + v_0 + v_1 + v_2 + \cdots .. + v_n$

S_n **est la somme de deux suites l'une arithmétique el l'autre géométrique**

$$S_n = \frac{u_0}{1-q}(1 - q^{n+1}) + \frac{(n+1)(v_0 + v_n)}{2}$$

$$= \frac{e^{-1}}{1 - \frac{1}{e^2}}\left(1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n+1}\right) + \frac{(n+1)(-1 + 3n - 1)}{2}$$

$$= \frac{e^{-1}}{1 - \frac{1}{e^2}}\left(1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n+1}\right) + \frac{(n+1)(3n-2)}{2}$$

$$= \frac{e^{-1}}{1 - \frac{1}{e^2}}\left(1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n+1}\right) + \frac{3n^2 - 2n + 3n - 2}{2}$$

$$S_n = \frac{e^{-1}}{1 - \frac{1}{e^2}}\left(1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n+1}\right) + \frac{3n^2 + n - 2}{2}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-1}}{1 - \frac{1}{e^2}}\left(1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n+1}\right) + \frac{3n^2 + n - 2}{2} = \frac{e^{-1}}{1 - \frac{1}{e^2}} + \infty = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{e^{-1}}{1 - \frac{1}{e^2}}\left(1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{3n^2 + n - 2}{2n^2} = \frac{3}{2}$$

Exercice 4

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+1}-ln(x+1)$$

1a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+1}-ln(x+1)$
$=2-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ =-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x+1}{x+1}-ln(x+1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x^2+x}-\frac{\ln(x+1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x^2+x}-\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x^2+x}-\frac{(x+1)}{x}\times\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}$$

$On\ pose\ \ t=x+1\Rightarrow x=t-1$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2(t-1)+1}{(t-1)^2+t-1}-\frac{t}{t-1}\times\frac{\ln t}{t}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2t-1}{t^2-2t+1+t-1}-\frac{t}{t-1}\times\frac{\ln t}{t}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2t-1}{t^2-t}-\frac{t}{t-1}\times\frac{\ln t}{t}\right)=0$$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0}$ $\Rightarrow$ la courbe (C) de f admet une branche infinie de direction (OX) au voisinage de $+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty+\infty\ F.I$

On pose $t=x+1\Rightarrow x=t-1$ $\begin{cases} si\ x\to(-1)^+ \\ \quad t\to 0^+\end{cases}$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{t\to0^+}\left(\frac{2(t-1)+1}{t}-\ln t\right)$$
$$=\lim_{t\to0^+}\left(\frac{2t-1-tlnt}{t}\right)$$

On a $\lim\limits_{t\to0^+} tlnt=-\infty$

$$=-\infty$$

$\boxed{\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)\ =-\infty}$ $\Rightarrow$ La courbe (C) de f admet une asymptote verticale d'équation $x=\ -1$

2a) $f'(x)=\frac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}$

$$=\frac{2x+2-2x-1}{(x+1)^2}-\frac{x+1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1 - x - 1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x = 0$$
$$\Rightarrow x = 0$$

La dérivée s'annule en $x_0 = 0$ $\Rightarrow$ La courbe (C) admet une tangente horizontale en $x_0 = 0$ d'équation $y = f(0) = 1$

b) TV de f

x	-1		0		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	-	
f(x)	‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

3a)

$$f''(x) = \frac{-(x+1)^2 - 2(x+1)(-x)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(x+1)(-x-1+2x)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{x-1}{(x+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow x = 1$$

$\Rightarrow$ La courbe (C) admet un point d'inflexion A d'abscisse 1

b) Équation de la tangente (T) à la courbe (C) en A

$$f'(1) = \frac{-1}{4}\ ,\ f(1) = \frac{3}{2} - \ln 2 = \frac{3 - 2\ln 2}{4}$$

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$y = -\frac{1}{4}(x-1) + \frac{3}{2} - \ln 2$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \ln 2$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4} - \ln 2$$

4 a) g est continue et décroissante de I= $[0, +\infty[$ vers J= $]-\infty, 1]$donc g réalise une bijection

b) TV de g^{-1}

x	$-\infty$		1
$(g^{-1}(x))'$	0	-	
$g^{-1}(x)$	$+\infty$	↘	0

$c)\ g(1) = \dfrac{3-2ln2}{2} \Rightarrow g^{-1}\left(\dfrac{3-2ln2}{2}\right) = 1$

$$(g^{-1})'\left(\frac{3-2ln2}{2}\right) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{3-2ln2}{2}\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{g'(1)}$$

$$= \frac{1}{\frac{-1}{4}}$$

$$(g^{-1})'\left(\frac{3-2ln2}{2}\right) = -4$$

5 a) $f$est continue et croissante de $]-1,0]$vers $]-\infty;1]$et f change de signe une seule fois donc il existe un unique réel $\alpha \in]0;1[$ tel que $f(\alpha) = 0$

$f(-0,7) \cong -0,97 < 0$, $f(-0,6) \cong 0,41 > 0 \Rightarrow f(-0,7) \times f(-0,6) < 0$

$$\Rightarrow \ -0,7 < \alpha < -0,6$$

$f$est continue et décroissante de $[0;+\infty[$ vers $]-\infty;1]$ et f change de signe une seule fois donc il existe un unique réel $\beta \in [0;+\infty[$ tel que $f(\beta) = 0$

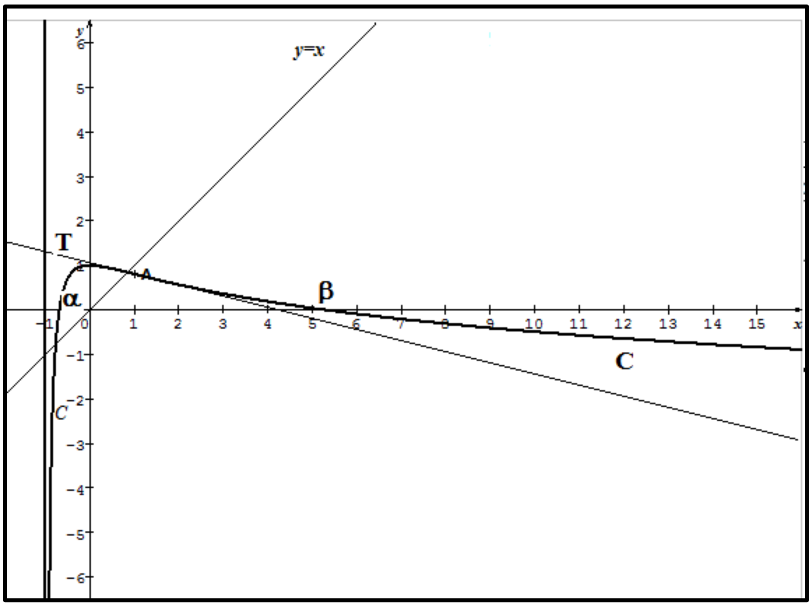
$f(5,3) \cong 7,20207873 \times 10^{-4} > 0$

$f(5,4) \cong -0,012 < 0$

$\Rightarrow f(5,3) \times f(5,4) < 0$

$\Rightarrow \ 5,3 < \beta < 5,4$

b)



6 a) f est la somme de deux fonctions dérivables sur $]-1,+\infty[$ donc f est dérivable sur$]-1,+\infty[$

b) $F(x) = ax - (x+b)ln(x+1)$

F(x) est la primitive de f si es seulement si $F'(x) = f(x)$

$$F'(x) = a - ln(x+1) - \frac{1}{x+1} \times (x+b)$$

$$F'(x) = a - \frac{x+b}{x+1} - ln(x+1)$$

$$F'(x) = \frac{ax+a-x-b}{x+1} - ln(x+1)$$

$$F'(x) = \frac{(a-1)x+a-b}{x+1} - ln(x+1)$$

$$F'(x) = \frac{2x+1}{x+1} - ln(x+1)$$

Par identification :

$$\begin{cases} a-1=2 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=a-1=2 \end{cases}$$

$$\boxed{F(x) = 3x - (x+2)ln(x+1)}$$

c) $A(\beta) = \int_0^\beta f(x)dx$

$=[3x-(x+2)ln(x+1)]_0^\beta$

$= 3\beta - (\beta+2)ln(\beta+1)$

$A(\beta) \cong 2,46$

BAC 2012
Session Compl.

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2012 session Complémentaire

Exercice 1 (3 points)

Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 3U_n - 2 \end{cases}$

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

1) La suite (V_n)définie par : $V_n = U_n - 1$ est une suite

A : géométrique	B : arithmétique	C : ni géométrique et ni arithmétique

2) La suite (T_n)définie par : $T_n = ln(V_n)$ est une suite

A : géométrique	B : arithmétique	C : bornée

3) La suite (W_n)définie par : $W_n = U_{n+1} - U_n$ est une suite

A : croissante	B : décroissante	C : non monotone

4) le terme général de la suite (U_n) est

A : $U_n = 1 + 3^n$	B : $U_n = 2 \times 3^n$	C : $U_n = 2n + 1$

5) La somme $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ est égal à

A : $S_n = \frac{1+3^{n+1}}{2}$	B : $S_n = n + \frac{1}{2} + \frac{3^{n+1}}{2}$	C : $S_n = \frac{1-3^n}{2}$

6) La limite de la suite (U_n) est

A : $-\infty$	B : 0	C : $+\infty$

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse.

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

1a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $z^2 - 2z + 5 = 0$

2) Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq -3 - 2i$ on pose :$f(z) = \frac{z-2-i}{z+3+2i}$

Écrire sous forme algébrique le nombre $P = f(1 - 2i)$

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O ;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = -3 - 2i$ et $z_C = 1 + 2i$

a)Placer les points A, B et C

b) Écrire le nombre $q = f(z_C)$ sous forme trigonométrique en déduire la nature du triangle ABC.

c) Déterminer et construire dans lé même repère les ensembles des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

$*\ \Gamma_1$ tel que $|f(z)| = 1$

$*\ \Gamma_2$ tel que *f(z)* soit imaginaire pur

$*\ \Gamma_3$ tels que $[f(z) - 1] = 2\sqrt{34}$

Exercice 3 (6points)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :$f(x) = x - 2 - 2\ln x$.

1. **Calculer, $\lim\limits_{n\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - x)$**

et interpréter graphiquement. **(1pt)**

2. Calculer f'(x) et dresser le tableau de variation de f . (1pt)
3. Donner l'équation de la tangente T à (C) au point A d'abscisse $x_0 = 1$. (0,75pt)
4. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet exactement deux solutions α et β et que $0.4 < \alpha < 0.5$; $5.3 < \beta < 5.4$. Démontrer que $\alpha^2 e^{\beta} = \beta^2 e^{\alpha}$. (0,5pt)
5. Soit g la restriction de f sur J =]0;2[.
a) Montrer que g réalisé une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera. (0,5pt)
b) Calculer $(g^{-1})'(-1)$ (On pourra utiliser la question 3) (0,5pt)
6. a)Tracer les courbes (C)et (C') respectivement des fonctions f et g^{-1} dans un repère orthonormé (O; i, j). (0,5pt)
b) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation 2x - 2 - m - 2 ln x = 0. (0,5pt)
7. a) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_1^2 \ln x dx$. (0,25pt)
b) Calculer l'aire du domine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. (0,25pt)

Exercice 4 (6points)

Soit g la fonction définie sur ℝ par : $g(x) = xe^x - 1$

1a) *Calculer* $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

b) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g

2a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution , Vérifier que : $0.5 < \alpha < 0.6$

b) Justifier que si : $x \le \alpha$ *alors* $g(x) \le 0$ *et si* $x \ge \alpha$ $g(x) \ge 0$

3) Soit f la fonction définie sur $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ *par :* $f(x) = \dfrac{e^x - x}{x+1}$

a) Justifier et interpréter les limites suivantes $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$;

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1, \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

b) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

c) dresser le tableau de variation de f

d) Vérifier que : $f(\alpha) = \dfrac{1 - \alpha^2}{\alpha^2 + \alpha}$ et donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-1} prés

4) Tracer la courbe (C) de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Corrigé baccalauréat 2012 session Complémentaire

Exercice 1

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse	A	B	A	A	B	C

Exercice 2:

1° Résolution de : $z^2-2z+5=0$. $\Delta'=(-1)^2-1\times5=-4=(2i)^2$; $z_1=1+2i$ et $z_2=1-2i$.

2° $p=f(1-2i)=\dfrac{1-2i-2-i}{1-2i+3+2i}=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}i$.

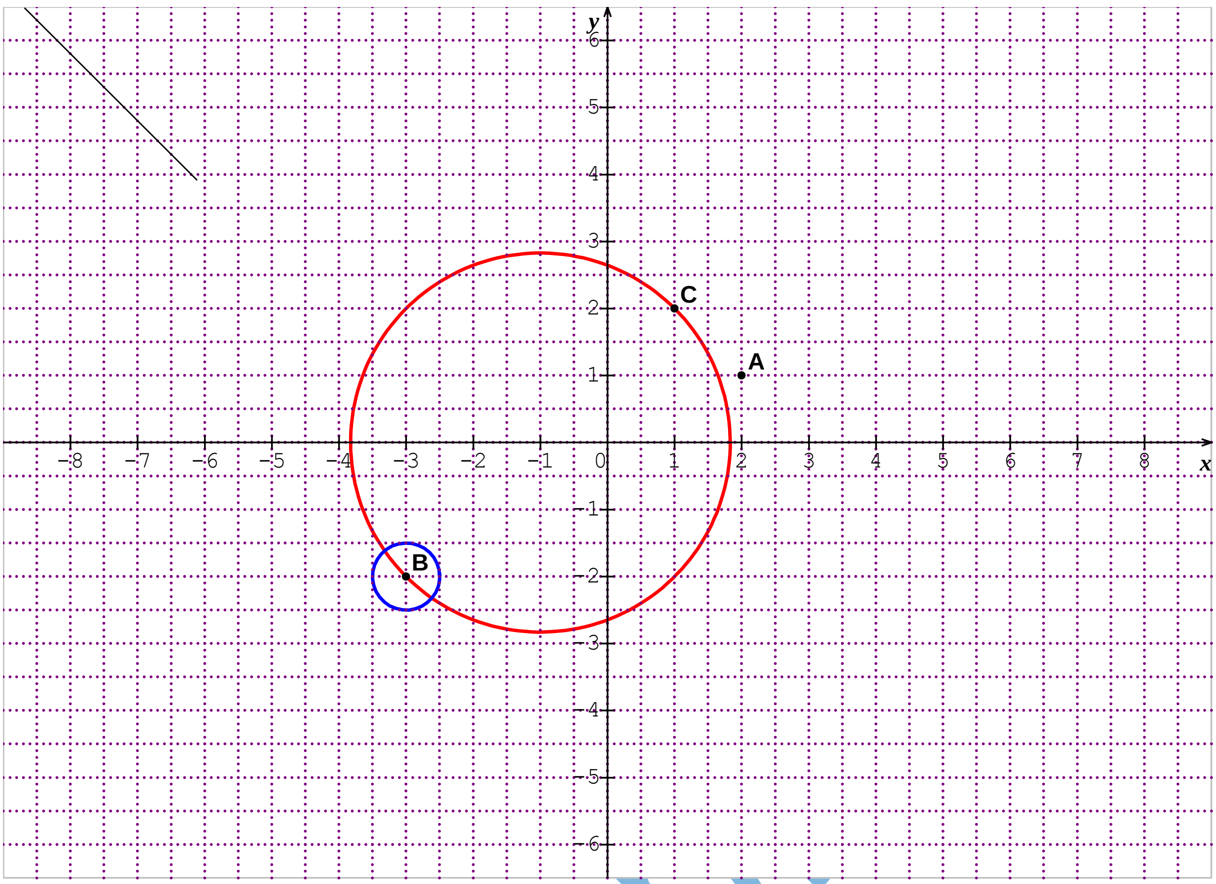
3° a) Schéma voir figure.

b) $q=f(1+2i)=\dfrac{1+2i-2-i}{1+2i+3+2i}=\dfrac{-1+i}{4+4i}=\dfrac{(-1+i)(1-i)}{4(1+i)(1-i)}=\dfrac{2i}{8}=\dfrac{1}{4}i$. Donc $q=\dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.

On remarque que : $q=\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ donc $\arg q=\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $|q|=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{1}{4}$. Le triangle ABC est rectangle en C.

c) Remarquons d'abord que : $f(z)=\dfrac{z-z_A}{z-z_B}$ donc $|f(z)|=\dfrac{MA}{MB}$ et $\arg f(z)=\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)\ [2\pi]$ s'il existe.

- $M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow |f(z)|=\dfrac{MA}{MB}=1$. L'ensemble est la médiatrice du segment $[BC]$.
- $M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(z)=0 \\ \text{ou} \\ \arg f(z)=\dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M=A \\ \text{ou} \\ \left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases}$. L'ensemble est le cercle de diamètre $[BC]$, privé du point B.
- $M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow |f(z)-1|=2\sqrt{34}$. On a $f(z)-1=\dfrac{z-2-i}{z+3+2i}-1=\dfrac{z-2-i-z-3-2i}{z+3+2i}=\dfrac{-5-3i}{z+3+2i}$ donc $|f(z)-1|=\dfrac{|-5-3i|}{|z+3+2i|}=\dfrac{\sqrt{34}}{MB}$. Alors $M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{34}}{MB}=2\sqrt{34} \Leftrightarrow MB=\dfrac{1}{2}$. L'ensemble est le cercle de centre B et de rayon $\dfrac{1}{2}$



Exercice 3:

f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = x - 2 - 2\ln x$

1° On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-2) = -2$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to 0^+} f(x) = +\infty$. La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale de la courbe (C). On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{2}{x} - 2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{x} - 2\frac{\ln x}{x}\right) = 1$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{x} - 2\frac{\ln x}{x}\right) = 1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-2 - 2\ln x) = -\infty$. La branche infinie de (C), en $+\infty$, a une direction parallèle à celle de la droite d'équation $y = x$.

2° f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ et le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 2$ car $x > 0$.

x		0		2		$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	
$f(x)$		-1	$\searrow$	$-2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

3° Une équation de la tangente à (C), en $x_0 = 1$, est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, soit $y = -x$.

4° D'après le TV de f, l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions : $0<\alpha<2<\beta$. D'autre part $f(0.4)\times f(0.5)<0$ et $f(5.3)\times f(5.4)<0$ donc $0.4<\alpha<0.5$ et $5.3<\beta<5.4$.

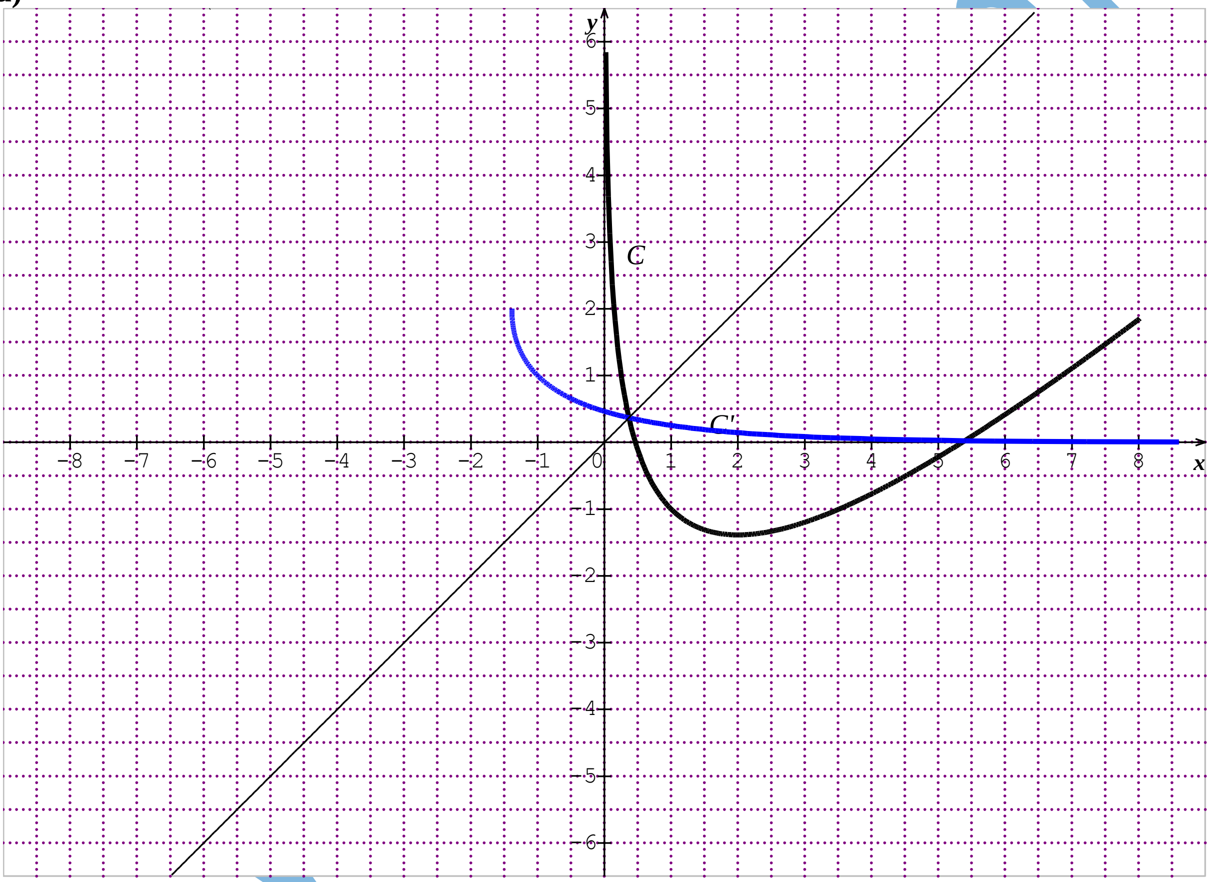
On a : $f(\alpha)=\alpha-2-2\ln\alpha=\ln e^{\alpha}-2-\ln\alpha^2$. De même $f(\beta)=\beta-2-2\ln\beta=\ln e^{\beta}-2-\ln\beta^2$. Or $f(\alpha)=f(\beta)=0$ donc $\ln e^{\alpha}-2-\ln\alpha^2=\ln e^{\beta}-2-\ln\beta^2 \Leftrightarrow \ln e^{\alpha}+\ln\beta^2=\ln e^{\beta}+\ln\alpha^2 \Leftrightarrow$ $\ln\left(e^{\alpha}\times\beta^2\right)=\ln\left(e^{\beta}\times\alpha^2\right)$. Soit encore $\beta^2e^{\alpha}=\alpha^2e^{\beta}$.

5° a) La fonction g est continue et strictement décroissante de $I=]0,2[$ sûr $J=]-2\ln 2,+\infty[$, donc elle réalise une bijection de I sûr J.

b) On a : $g(1)=f(1)=-1 \Leftrightarrow g^{-1}(-1)=1$ donc $\left(g^{-1}\right)'(-1)=\dfrac{1}{g'(1)}=\dfrac{1}{-1}=-1$.

6° Tracés des courbes :

a)



b) L'équation $2x-2-m-2\ln x=0 \Leftrightarrow x-2-2\ln x=-x+m \Leftrightarrow f(x)=-x+m$. Toute solution de l'équation est l'abscisse d'un point commun à (C) et la droite $D_m : y=-x+m$.

Valeurs de m	Nombre de solutions
$m<0$	0
$m=0$	1 une solution double
$m>0$	2

7° a) Soit $\int_1^2 \ln x dx$. On procède par intégration par parties en posant : $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\ln x \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$. $\int_1^2 \ln x dx = [x\ln x]_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - [x]_1^2 = 2\ln 2 - 1$

b) L'aire demandée est $A = -\int_1^2 f(t)dt = -\int_1^2 (t-2-2\ln t)dt \Leftrightarrow$

$A = -\left[\frac{1}{2}(t-2)^2\right]_1^2 + 2\int_1^2 \ln x dx = \frac{1}{2} + 2(2\ln 2 - 1) = -\frac{3}{2} + 4\ln 2$ ua.

Exercice 4:

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^x - 1$

1° a) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, limite remarquable, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$. Aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

b) $g'(x) = 1\times e^x + x\times e^x - 0 = (1+x)e^x$. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	$-1 \searrow$	$-1-\frac{1}{e}$	$\nearrow +\infty$

2° a) L'expression $g(x)$ est strictement négative sur $]-\infty,-1]$ tandis que g réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sûr $\left[-1-\frac{1}{e},+\infty\right[$, donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α. Comme $g(0.5)\times g(0.6) < 0$, alors $0.5 < \alpha < 0.6$.

b) D'après le TV de g on a : $g(]-\infty,\alpha]) = \left[-1-\frac{1}{e},0\right]$ donc, si $x \le \alpha$ alors $g(x) \le 0$ et $g([\alpha,+\infty[) = [0,+\infty[$ donc, si $x \ge \alpha$ alors $g(x) \ge 0$.

3° La fonction f est définie sur $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - x}{x+1}$

a) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-1^-} (e^x - x) = 1 - \frac{1}{e} > 0 \\ \lim\limits_{x\to-1^-} (x+1) = 0^- \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$; On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-1^+} (e^x - x) = 1 - \frac{1}{e} > 0 \\ \lim\limits_{x\to-1^+} (x+1) = 0^+ \end{cases}$ doncce qui veut dire que la droite d'équation : $x=-1$ est une asymptote verticale

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x}{x+1} - 1 + \dfrac{1}{x+1}\right) = -1$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x}{x+1}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x+1}\right) = 0$ ce qui s'interprète par le fait que la droite d'équation : $y=-1$ est une asymptote horizontale en $-\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\times\frac{x}{x+1}-\frac{x}{x+1}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)=1$.

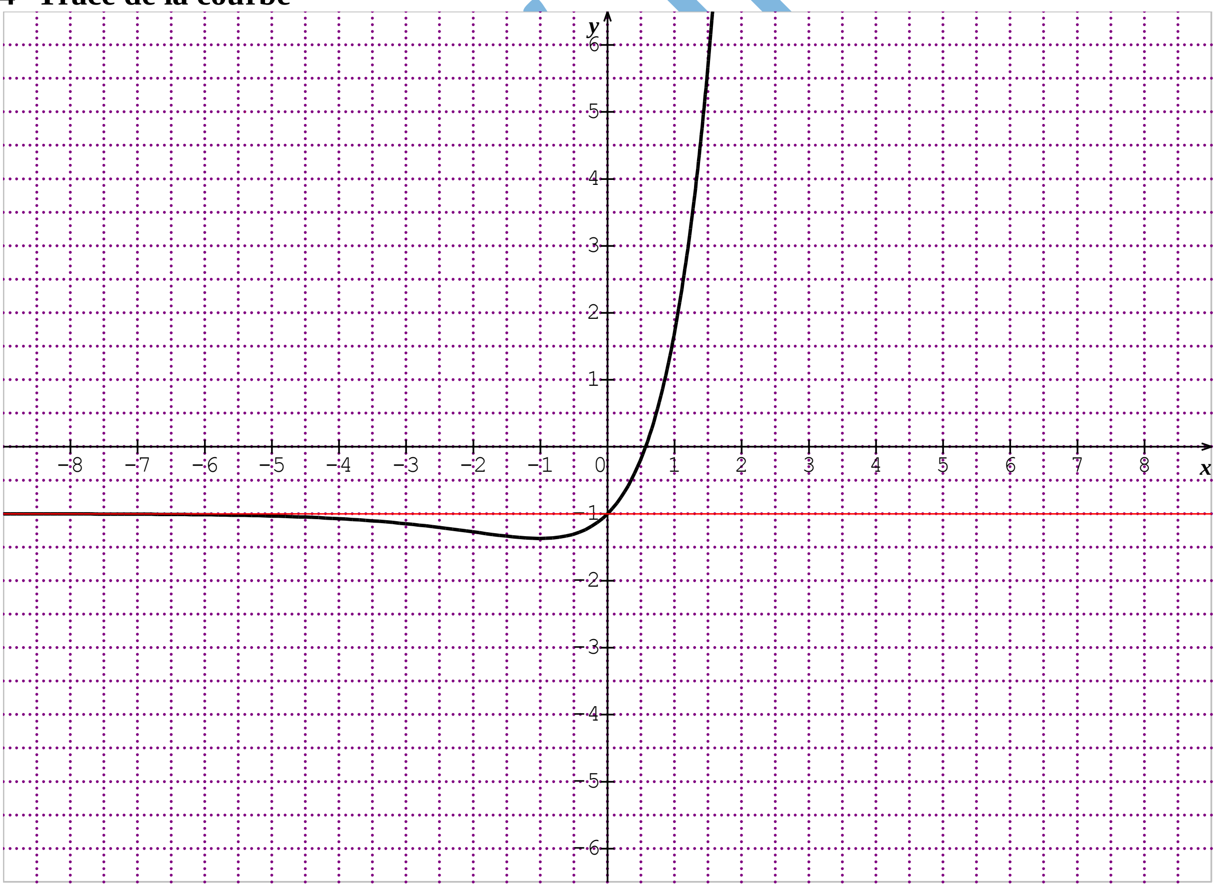
On peut écrire $\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{e^x}{x^2}\times\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x+1}\right)$. Or $\frac{e^x}{x^2}=\frac{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2}{4\times\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{4}\times\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)^2$. On pose $t=\frac{x}{2}$ alors $(x\to+\infty\Leftrightarrow t\to+\infty)$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\times\left(\frac{e^t}{t}\right)^2\times\frac{2t}{2t+1}-\frac{1}{2t+1}\right)=+\infty$. On en déduit que la branche infinie en $+\infty$ est de direction (Oy).

b) $f'(x)=\frac{(e^x-1)(x+1)-1\times(e^x-x)}{(x+1)^2}=\frac{xe^x+e^x-x-1-e^x+x}{(x+1)^2}=\frac{xe^x-1}{(x+1)^2}$ ou encore $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$.

c) Tableau de variation de f.

d) On a : $f(\alpha)=\frac{e^\alpha-\alpha}{\alpha+1}$; Or $g(\alpha)=0\Leftrightarrow \alpha e^\alpha-1=0\Leftrightarrow e^\alpha=\frac{1}{\alpha}$. Par suite $f(\alpha)=\frac{\frac{1}{\alpha}-\alpha}{\alpha+1}=\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2+\alpha}$.

4° Tracé de la courbe



BAC 2013
Session Normale

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2013 session Normale

Exercice 1 (3points)

Une urne contient 4boules blanches et 2boules noires indiscernables au toucher.
On effectue au hasard un tirage de 2 boules simultanément de l'urne.
On note A_0l'événement « on a obtenu aucune boule noire »
On note A_1l'événement « on a obtenu une seule boule noire »
On note A_2l'événement « on a obtenu deux boules noires »
Soit x la variable aléatoire qui, associe le nombre de boules noires tirées.
Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Le nombre de tirages possibles est :	C_6^2	A_6^2	6^2
2	La probabilité p (A_0)est :	$\frac{4}{6}$	$\frac{6}{15}$	$\left(\frac{4}{6}\right)^2$
3	La probabilité p (A_1)est :	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
4	La probabilité p (A_2)est :	$\frac{4}{6}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$
5	L'espérance mathématique de X est :	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{15}$	4

Recopie et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse.
Aucune justification n'est demandée :

Question	1	2	3	4	5
Réponse					

Exercice2 (5points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé$(O;\vec{u},\vec{v})$.
1.a) Résoudre dans ℂ l'équation : (E_1) $z^2+2z+10=0$
On notez$z_1$et $z_2$ses solutions avec $I_m(z_2)\leq 0$
b) Résoudre dans ℂ l'équation : (E_2) $z^2-4z+20=0$
On notez$z_3$et $z_4$ses solutions avec $I_m(z_4)\leq 0$
2) on considère les points A, B, K, L et E d'affixes respectives :
$z_A=z_1$; $z_B=z_2$, $z_K=z_3$, $z_L=z_4$et $z_E=z_3-2i$
a) Placer les points A, B, K, L et E dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.
b) Écrire $z_E=z_3-2i$ sous forme algébrique et trigonométrique.
c) Déterminer la nature du quadrilatère ABLE et du triangle AKE.
3) Pour tout nombre complexe z tel que $z\neq -1+3i$ on pose : $f(z)=\frac{z-2-4i}{z+1-3i}$
Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :
* Γ_1 tel que $|f(z)|=1$
* Γ_2 tel que $|f(z)-1|=\sqrt{10}$

Exercice3 (4points)

On considère la suite numérique (u_n)définie par $u_0=6$ et pour tout $n\in$ ℕ ,
$U_{n+1}=3U_n+10n-13$
1a) Calculer u_1, $u_2$et vérifier que $U_3=43$
b) Justifier que la suite numérique(u_n)n'est ni géométrique ni arithmétique.
2) On définit la suite numérique(v_n) par : pour tout entier $n\in$ ℕ , $V_n=U_n+5n-4$
a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.Exprimer v_n en fonction de n.
b) A partir de quel terme a-t-on $V_n\geq 2013$
c) En déduire que, pour tout $n\in$ ℕ , $\mathrm{U_n}=2\times 3^{\mathrm{n}}-5\mathrm{n}+4$
3) Pour tout entier naturel n, on pose$S_n=U_0+U_1+\cdots\ldots+U_n$.
Déterminer l'expression de$S_n$en fonction de n.

Exercice 4 **(8points)**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^2-3+2\ln x$

1a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g.

2a) Montrer que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α.

Vérifier que $1,34\le\alpha\le1,35$.

c) En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x-2+\frac{1-\ln x}{x^2}$

On note Γ sa courbe représentative dans le plan, muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ orthonormé

1a) Démontre que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x-2))=0$

b) Interpréter graphiquement les limites précédentes

c) Étudier le signe de $d(x)=f(x)-(x-2)$, Résumer dans un tableau et interpréter graphiquement.

2a) Calculer $f'(x)$ et justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$

b) Montrer que $f(\alpha)=\frac{3\alpha^3-4\alpha^2-1}{2\alpha^2}$ et donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-1} prés

c) En déduire le tableau de variation de f

3a) Donner l'équation de la tangente T à Γ au point A d'abscisse $x_0=1$

b) Montrer que la courbe Γ coupe l'axe des abscisses en un deuxième point autre que A d'abscisse β telle que $1,9\le\beta\le2$

c) Tracer l'allure de la courbe dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

4) Soit n un entier naturel $n\ge3$, on considère l'aire du domaine E du plan compris entre la courbe et les droites d'équations respectives $y=x-2$, $x=3$ et $x=n$

a) Justifier que cette aire, exprimé en cm^2, est donnée par : $I_n=\int_3^n\frac{-1+\ln x}{x^2}dx$

b) Calculer $J_0=\int_3^n\frac{\ln x}{x^2}dx$ à l'aide d'une intégration par parties. En déduire I_n en fonction de n

c) Calculer la limite de l'aire I_n du domaine E quand n tend vers $+\infty$

Corrigé baccalauréat 2013 session Normale

Exercice 1

Question n°	1	2	3	4	5
Réponse	A	B	A	C	A

Exercice 2

1a) $z^2 + 2z + 10 = 0$

$\Delta = 4 - 40 = -36 = 36i^2 = (6i)^2$

$$z_1 = \frac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i$$

$$z_2 = \frac{-2 - 6i}{2} = -1 - 3i$$

$S = \{-1 + 3i; -1 + 3i\}$

b) $z^2 - 4z + 20 = 0$

$\Delta = 4 - 80 = -64 = 64i^2 = (8i)^2$

$$z_3 = \frac{4 + 8i}{2} = 2 + 4i$$

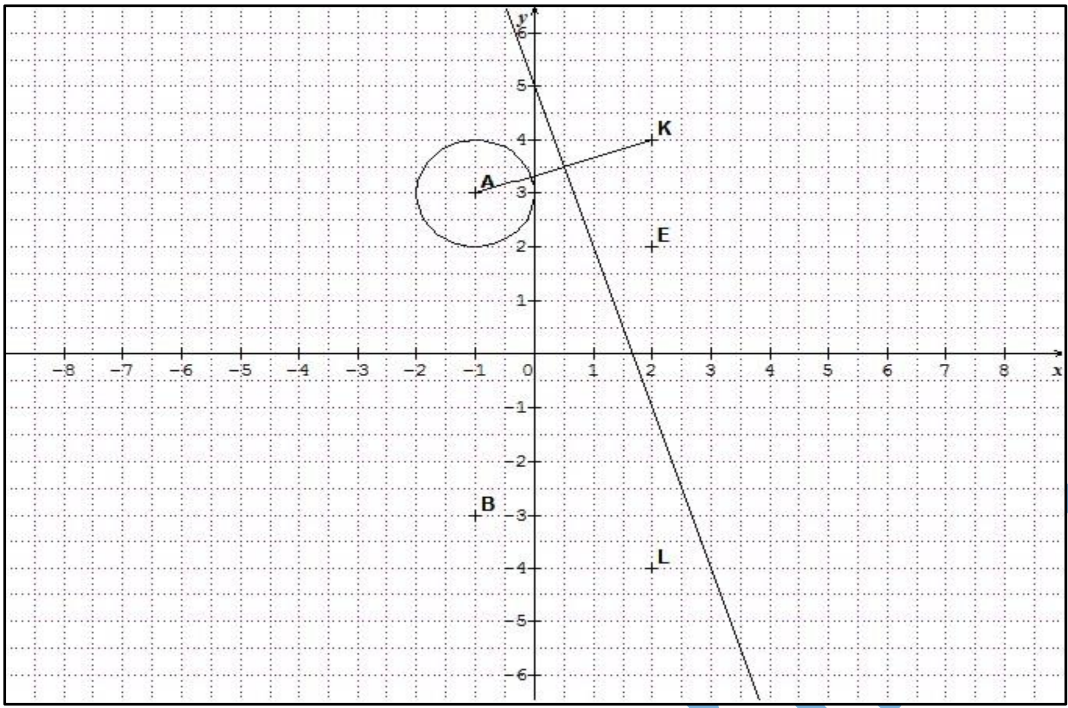
$$z_4 = \frac{4 - 8i}{2} = 2 - 4i$$

$\Rightarrow$ S=$\{2 + 4i; 2 - 4i\}$

2) $z_A = z_1 = -1 + 3i$; $z_B = z_2 = -1 - 3i$, $z_K = z_3 = 2 + 4i$, $z_L = z_4 = 2 - 4i$,

$z_E = z_3 - 2i = 2 + 4i - 2i = 2 + 2i$

a)



b) $|z_E| = |2+2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\arg z_E = arg(2+2i) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$\boxed{z_E = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

c)

le milieu **du segment** $[AL] = \frac{ZA+ZL}{2} = \frac{-1+3i+2-4i}{2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

le milieu **du segment** $[BE] = \frac{ZB+ZE}{2} = \frac{-1-3i+2+2i}{2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Les segments $[AL]$ **et** $[BE]$ **ont le même milieu donc le quadrilatère ABLE est un parallélogramme.**

$AE = |Z_E - Z_A| = |2+2i+1-3i| = |3-i| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$AK = |Z_K - Z_A| = |2+4i+1-3i| = |3+i| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$AE = AK = \sqrt{10} \Rightarrow$ **Le triangle AKE est isocèle en A**

3) $f(z) = \frac{z-2-4i}{z+1-3i}$

$* \ |f(z)| = 1 \Rightarrow$

$$\left|\frac{z-2-4i}{z+1-3i}\right| = 1$$

$$\left|\frac{z-(2+4i)}{z-(-1+3i)}\right| = 1$$

$$\left|\frac{Z_M - Z_K}{Z_M - Z_A}\right| = 1$$

$$\frac{KM}{AM} = 1$$

$KM = AM$

$\Rightarrow \Gamma_1$ **Est la médiatrice du segment** $[AK]$ **.**

$* \ |f(z) - 1| = \sqrt{10} \ \Rightarrow$

$\left|\frac{z-2-4i}{z+1-3i} - 1\right| = \sqrt{10} \Rightarrow$

$\left|\frac{z-2-4i-z-1+3i}{z+1-3i}\right| = \sqrt{10} \Rightarrow$

$\left|\frac{-3-i}{z+1-3i}\right| = \sqrt{10} \Rightarrow$

$\frac{\sqrt{10}}{|z+1-3i|} = \sqrt{10} \Rightarrow$

$\sqrt{10}|z+1-3i| = \sqrt{10} \Rightarrow$

$|z+1-3i| = 1 \Rightarrow$

$|Z_M - (-1+3i)| = 1 \Rightarrow$

$|Z_M - Z_A| = 1 \Rightarrow$

$AM = 1$

Γ_2 **est le cercle de centre A et de rayon** $r = 1$

Corrigé l'Exercice 3

$$\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = 3U_n + 10n - 13 \end{cases}$$

$1a)$ $U_1 = 3U_0 - 13 = 3 \times 6 - 13 = 18 - 13 = 5$

$U_2 = 3U_1 + 10 - 13 = 3 \times 5 + 10 - 13 = 15 + 10 - 13 = 12$

$U_3 = 3U_2 + 10 \times 2 - 13 = 3 \times 12 + 20 - 13 = 36 + 20 - 13 = 43$

b)

$\begin{cases} U_1 - U_0 = 5 - 6 = -1 \\ U_2 - U_1 = 12 - 5 = 7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{U_1 - U_0 \neq}$

$\boxed{U_2 - U_1} \Rightarrow (U_n) n'est\ pas\ une\ suite\ arithmétique$

$\begin{cases} \frac{U_1}{U_0} = \frac{5}{6} \\ \frac{U_2}{U_1} = \frac{12}{5} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1} \Rightarrow} (U_n)\ n'est\ pas\ une\ suite\ géométique$

2°a) $V_n = U_n + 5n - 4$

$V_{n+1} = U_{n+1} + 5(n+1) - 4$

$= 3U_n + 10n - 13 + 5n + 5 - 4$

$= 3U_n + 15n - 12$

$= 3(U_n + 5n - 4)$

$V_{n+1} = 3V_n$

(V_n) *est une suite géométique* **de** *raison* $q = 3$ **et de premier terme**

$v_0 = U_0 - 4 = 6 - 4 = 2$

$V_n = V_0 q^n = 2 \times 3^n$

b) $V_n \geq 2013 \Rightarrow\ 2 \times 3^n \geq 2013$

$\Rightarrow 3^n \geq \frac{2013}{2}$

$\Rightarrow n\ln 3 \geq \ln\left(\frac{2013}{2}\right)$

$\Rightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{2013}{2}\right)}{\ln 3}$

$v_n \geq 2013 \;\; \Rightarrow n \geq \frac{6{,}914234245}{1{,}098612289} = 6,29360723$

$V_n \geq 2013$ *à partir de* V_7

c) $V_n = U_n + 5n - 4 \Rightarrow U_n = V_n - 5n + 4$

$\Rightarrow U_n = 2 \times 3^n - 5n + 4$

3) $S_n = U_0 + U_1 + \cdots \ldots + U_n$

(S_n) *est* la somme de la suite géométrique (V_n) et la suite arithmétique (w_n) définie par $w_n = -5n + 4$

D'où $S_n = \frac{V_0}{1-q}(1 - q^{n+1}) + \frac{(n+1)(w_0+w_n)}{2}$

$$S_n = \frac{2}{1-3}(1 - 3^{n+1}) + \frac{(n+1)(4 - 5n + 4)}{2}$$

$$S_n = -(1 - 3^{n+1}) + \frac{(n+1)(8 - 5n)}{2}$$

$$S_n = -1 + 3^{n+1} + \frac{8n - 5n^2 + 8 - 5n}{2}$$

$$S_n = -1 + 3^{n+1} + \frac{3n - 5n^2 + 8}{2}$$

$$S_n = -1 + 3^{n+1} + \frac{3}{2}n - \frac{5}{2}n^2 + 4$$

$$S_n = 3 + 3^{n+1} + \frac{3}{2}n - \frac{5}{2}n^2$$

Exercice 4

Partie A

$g(x) = x^3 - 3 + 2lnx$

1a) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^3 - 3 + 2lnx) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3 + 2lnx) = +\infty - 3 + \infty = +\infty$

b) $g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} > 0$

TV de g

x	0		$+\infty$
g'(x)	||	+	
g(x)	|| $-\infty$	↗	$+\infty$

2a) g est continue et strictement croissante de $]0, +\infty[$ vers J=$\mathbb{R}$ donc g réalise une bijection.

b) g réalise une bijection et change de signe une seule fois donc il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$

$g(1,34) < 0$ et $g(1,35) > 0 \Rightarrow \; g(1,34) \times g(1,35) < 0$ donc $1,34 < \alpha < 1{,}35$

Signe de g(x)

c) $\begin{cases} \text{Si } x \in]0, \alpha] \Rightarrow g(x) \leq 0 \\ \text{Si } x \in [\alpha, +\infty[\Rightarrow g(x) \geq 0 \end{cases}$

Partie B

1a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x - 2 + \frac{1 - lnx}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0^+} x - 2 + \frac{1}{x^2} - \frac{lnx}{x^2}$$
$$= 0 - 2 + \infty + \infty$$
$$= +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} x - 2 + \frac{1}{x^2} - \frac{lnx}{x^2}$$
$$= +\infty - 2 + 0 - 0$$
$$= +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} f(x) - (x-2) = \lim_{n\to+\infty} x - 2 + \frac{1}{x^2} - \frac{lnx}{x^2} - x + 2$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x^2} - \frac{lnx}{x^2}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-2) = 0$$

b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow \Gamma$ *admet* une asymptote verticale *d'équation* $x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-2) = 0 \Rightarrow \Gamma$*admet* une asymptote oblique *d'équation* $y = x - 2$

c) $d(x) = f(x) - (x-2)$
$$d(x) = \frac{1 - lnx}{x^2}$$
$x^2 > 0 \Rightarrow$ le signe de $d(x)$ est celui de $1 - lnx$
$$d(x) = 0 \Rightarrow 1 - lnx = 0$$
$$\Rightarrow lnx = 1$$
$$\Rightarrow x = e$$

x	$-\infty$		e		$+\infty$
Signe d(x)		+	0	-	
P.R		Γ/D	O	D/Γ	

2a)
$$f'(x) = 1 + \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1 - lnx)}{x^4}$$
$$f'(x) = 1 + \frac{-x - 2x + 2xlnx}{x^4}$$
$$= 1 + \frac{-3x + 2xlnx}{x^4}$$
$$= \frac{x^4 - 3x + 2xlnx}{x^4}$$
$$= \frac{x(x^3 - 3 + 2lnx)}{x^4}$$
$$= \frac{x^3 - 3 + 2lnx}{x^3}$$
$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$
$x \in]0, +\infty[\Rightarrow x^3 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

b)
$$f(\alpha) = \alpha - 2 + \frac{1 - ln\alpha}{\alpha^2}$$

on a $g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 - 3 + 2ln\alpha = 0$

$\Rightarrow 2ln\alpha = 3 - \alpha^3$

$\Rightarrow \ln\alpha = \frac{3-\alpha^3}{2}$

On remplace $ln\alpha$ dans l'expression de $f(\alpha)$

$$f(\alpha) = \alpha - 2 + \frac{1 - \frac{(3-\alpha^{3)}}{2}}{\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = \alpha - 2 + \frac{\frac{2-3+\alpha^3}{2}}{\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = \alpha - 2 + \frac{-1+\alpha^3}{2\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha^3 - 4\alpha^2 - 1 + \alpha^3}{2\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = \frac{3\alpha^3 - 4\alpha^2 - 1}{2\alpha^2}$$

$f(\alpha) \cong -0,2$

c) TV de f

x	0		α		+∞
f '(x)			0		
f(x)	+∞	↘	f(α)	↗	+∞

3a) $f(x_0) = f(1) = 0$

$f'(x_0) = f'(1) = -2$

$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

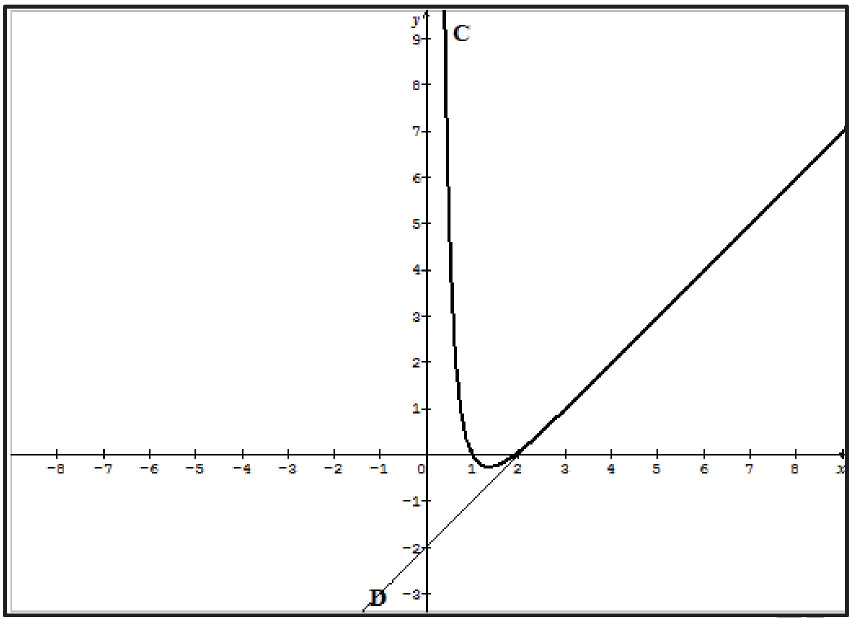
$y = -2(x - 1)$

$y = -2x + 2$

b) $f(1) = 0 \Rightarrow$ la courbe Γ coupe l'axe des abscisses en un premier A point d'abscisse 1
Puisque f change de signe 2fois sur $]0, +\infty[$ donc il existe un deuxième point autre que A d'abscisse $\beta \in [\alpha, +\infty[$

$$\begin{cases} f(1,9) = -0,006 < 0 \\ f(2) = 0,076 > 0 \end{cases} \Rightarrow f(1,9) \times f(2) < 0 \Rightarrow 1,9 < \beta < 2$$

c)



4) Sur $[\beta, +\infty[$ on a $d(x) < 0 \Rightarrow I_n = -\int_3^n d(x)dx$

$$\Rightarrow \ I_n = -\int_3^n \frac{1-lnx}{x^2}dx$$

$$\Rightarrow \ I_n = \int_3^n \frac{-1+lnx}{x^2}dx$$

b) $J_n = \int_3^n \frac{lnx}{x^2}dx$

on pose $\begin{cases} u = lnx \rightarrow u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x^2} \rightarrow v = \frac{-1}{x} \end{cases}$

$\Rightarrow$

$$J_n = \left[\frac{-lnx}{x}\right]_3^n + \int_3^n \frac{1}{x^2}dx \Rightarrow$$

$$J_n = \frac{-lnn}{n} + \frac{ln3}{3} + \left[\frac{-1}{x}\right]_3^n$$

d'où

$$\boxed{J_n = \frac{-lnn}{n} + \frac{ln3}{3}}$$

$$I_n = \int_3^n \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{lnx}{x^2}\right)dx$$

$$I_n = \int_3^n -\frac{1}{x^2}dx + \int_3^n \frac{lnx}{x^2}dx$$

$$I_n = \int_3^n -\frac{1}{x^2}dx + J_n$$

$$I_n = \left[\frac{1}{x}\right]_3^n + \frac{-lnn}{n} + \frac{ln3}{3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3}$$

$$I_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{3} - \frac{lnn}{n} + \frac{ln3}{3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3}$$

$$I_n = \frac{ln3}{3} - \frac{lnn}{n}$$

c)

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{ln3}{3} - \frac{lnn}{n} = \frac{ln3}{3}$$

BAC 2013
Session Compl.

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 201 3 session Normale

Exercice 1 (3points)

On considère la suite arithmétique (U_n) de raison $r = 3$ et de premier terme $U_0 = 15$
Pour chaque question, parmi les réponses proposées, une seule est exacte

N	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Le terme général de la suite (U_n) est :	$U_n = 3 + 15n$	$U_n = 15 + 3n$	$U_n = 3n + 12$
2	La valeur de U_{10} est :	$U_{10} = 153$	$U_{10} = 13$	$U_{10} = 45$
3	Si $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \cdots U_n = 204$	$n = 204$	$n = 30$	$n = 7$
4	La suite (V_n) de terme général $V_n = \frac{1}{U_n}$	Convergente	Croissante	géométrique
5	La suite (V_n) de terme général $T_n = e^{U_n}$ est :	arithmétique	Géométrique	Majorée
5	Si (W_n) est une suite numérique telle que pour tout n : $V_n \leq W_n \leq U_n$, alors (W_n)est	Minorée	Décroissante	Divergente

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci- dessous. Aucune justification n'est demandée

N° question	1	2	3	4	5
Réponse Exacte					

Exercice 2(5points)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes (E): $z^2 - 6z + 18 = 0$
2) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes (E') : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$
3) Écrire sous forme trigonométrique et exponentielle chacun des nombres :
$u = 3 + 3i$ et $v = \sqrt{3} - i$
4) On pose $w = (3 + 3i)(\sqrt{3} - i)$

a) Écrire w sous forme algébrique
b) En utilisant 3) écrire w sous forme trigonométrique et exponentielle
c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice 3(6points)

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + ln(x+1)$

1a) Montre que $\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ et interpréter graphiquement.

2-Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f

3a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans I une unique solution α Vérifier que :$1,2 < \alpha < 1,3$

c) Construire la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

4- pour tout $x > -1$; on pose $u(x) = (x+1)ln(x+1)$

a) Calculer $u'(x)$ et montrer que pour tout $x > -1$ on a $f(x) = u'(x) + x - 3$

b) En déduire la primitive F de la fonction f sur$]-1, +\infty[$ qui vérifie $F(0) = 0$

c) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) de f et les droites d'équations : $x = \alpha$ et $x = 0$

5- soit f^{-1}la réciproque de f. (C')sa courbe représentative dans le repère précédent.

a) Déterminer de ce qui précède les limites: $\lim_{x \to -\infty} f^{-1}(x)$; $\lim_{x \to +\infty} f^{-1}(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x}$

b) Calculer $(f^{-1})'(-2)$ et donner l'équation de la tangente à la courbe (C')au point d'abscisse $x_0 = -2$

Exercice 4 (6points)

1-on considère la fonction numérique g définie par $g(x) = (2x+3)e^{x+1} + 1$

a) Justifier que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1$

b) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g .

c) en déduire que pour tout réel x ; $g(x) > 0$

2) On considère la fonction numérique f définie :$f(x) = x - 3 + (2x+1)e^{x+1}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

a) Montrer que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Calculer et interpréter graphiquement $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

c) Montrer que la droite D d'équation $y = x - 3$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$

puis déterminer leurs positions relatives.

3a) Écrire $f'(x)$ en fonction de $g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f

4a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α puis vérifier que $0 < \alpha < 0,1$

5a) Montrer que la solution α vérifie l'égalité $ln\left(\frac{3-\alpha}{2\alpha+1}\right) - \alpha = 1$

5a) Montrer qu'il existe un unique point A auquel la tangente T à (C) est parallèle à l'asymptote oblique d'équation $y = x - 3$.Donner l'équation de T.

b) Construire la courbe (C), la tangente T et l'asymptote D

c) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre m le nombre de solutions de l'équation$(2x+1)e^{x+1} - m - 3 = 0$

Corrigé Baccalauréat 2013 session Complémentaire

Exercice 1 :

Question N°	1	2	3	4	5	6
Réponse	B	C	C	A	B	A

Exercice 2 :

1° Résolution de : $z^2-6z+18=0$. $\Delta'=(-3)^2-1\times18=-9=(3i)^2$; $z_1=3+3i$ et $z_2=3-3i$.

2° Résolution de : $z^2-2z\sqrt{3}+4=0$. $\Delta'=\left(-\sqrt{3}\right)^2-1\times4=-1=(i)^2$; $z_1=\sqrt{3}+i$ et $z_2=\sqrt{3}-i$.

3° $u=3+3i=3\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$;

$v=\sqrt{3}-i=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

4° $w=(3+3i)\left(\sqrt{3}-i\right)=u\times v$

a) $w=(3+3i)\left(\sqrt{3}-i\right)=3\sqrt{3}-3i+3i\sqrt{3}+3=3\left(1+\sqrt{3}\right)+3i\left(-1+\sqrt{3}\right)$ ..

b) On a $|w|=|u|\times|v|=2\times3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$; $\arg w=\arg u+\arg v=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$. Alors :

$w=6\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)=6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

c) Par identification des deux écritures de w on trouve :

$$\begin{cases}6\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{12}=3\left(1+\sqrt{3}\right)\\ 6\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{12}=3\left(-1+\sqrt{3}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\ \sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

Exercice 3

a) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}x-2+ln(x+1)=-1-2-\infty=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x-2+ln(x+1)=+\infty-2+\infty=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2+ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}x-2+ln(x+1)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}-2+ln(x+1)=+\infty$

La courbe (C) admet une branche infinie de direction la droite Δd'équation $y=x$ au voisinage de$+\infty$.

Étudions le signe de $f(x)-x$

$f(x)-x=-2+ln(x+1)$
$f(x)-x=0\Rightarrow -2+ln(x+1)=0$
$\Rightarrow ln(x+1)=2$
$\Rightarrow x+1=e^2$
$\Rightarrow x=e^2-1$

$A(e^2-1;e^2-1)$

X	0		e^2-1		$+\infty$
f(x)-y		-	0	+	
Position relative		Δ/C	A	C/Δ	

$2f'(x)=1+\dfrac{1}{x+1}>0\Rightarrow$ f est strictement croissante

T.V de f

x	-1		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

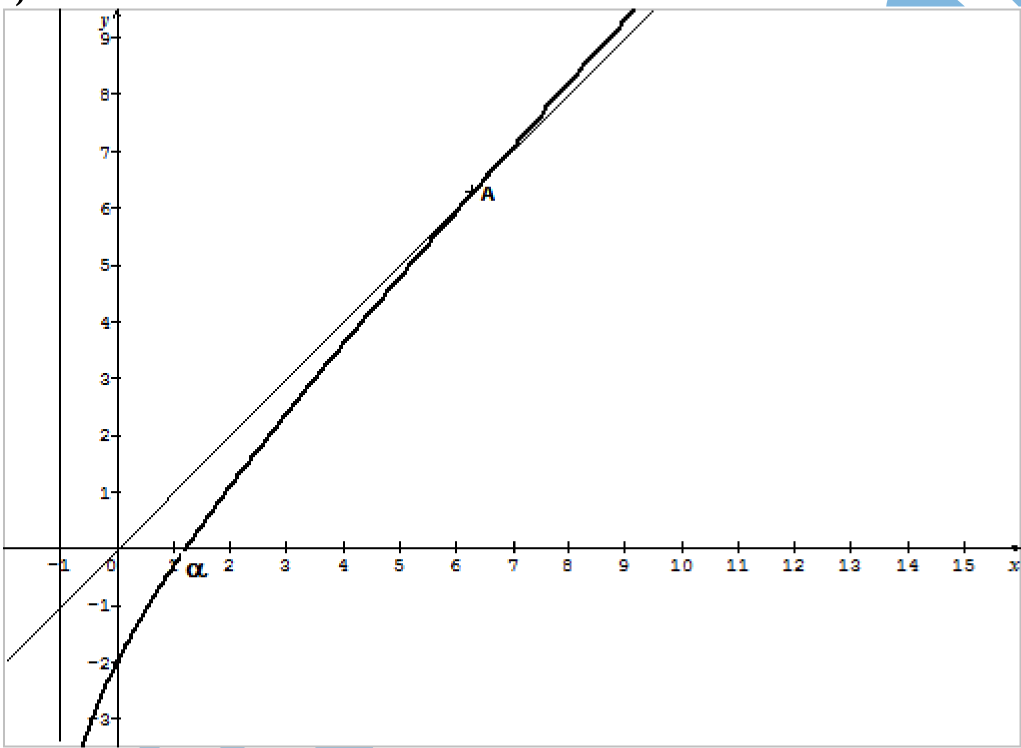
3a) f est continue et strictement croissante de $I=]-1,+\infty[$ vers J=$\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection

b) f une bijection de I vers J et 0$\in J$ donc l'équation f(x)=0 admet une unique solution α

$f(1,2)=-1,15\times10^{-2}<0$ **et** $f(1,3)=0,13>0$

$f(1,2)\times f(1,3)<0 \Rightarrow 1,2<\alpha<1,3$

c)



4a) $u(x)=(x+1)ln(x+1)$

$u'(x)=ln(x+1)+\frac{1}{x+1}\times(x+1)$

$u'(x)=ln(x+1)+1 \Rightarrow ln(x+1)=u'(x)-1$

$f(x)=x-2+ln(x+1)$ **remplaçons** $ln(x+1)$ **par** $u'(x)-1$

d'où $f(x)=x-2+u'(x)-1 \Rightarrow f(x)=u'(x)+x-3$

c) $f(x)=u'(x)+x-3 \Rightarrow F(x)=u(x)+\frac{x^2}{2}-3x+k$

$$\Rightarrow F(x)=\frac{x^2}{2}-3x+(x+1)ln(x+1)$$

d) $A=\int_0^{\alpha}f(x)dx=[F(x)]_0^{\alpha}=F(\alpha)-F(0)=\frac{\alpha^2}{2}-3\alpha+(\alpha+1)ln(\alpha+1)$

5a) $\lim\limits_{x\to-\infty}f^{-1}(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x}=1$

b) $\left(f^{-1}\right)'(-2) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(-2))} = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{2}$

$y = (f^{-1})'(-2)(x+2) + f^{-1}(2)$

$y = \frac{1}{2}(x+2) = \frac{1}{2}x + 1$

Exercice 4

1a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2x+3)e^{x+1} + 1 = (+\infty)(+\infty) + 1 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x+3)e^{x+1} + 1 = 1$ ***Puisque*** $\lim\limits_{x\to-\infty} (\alpha x+\beta)e^{\alpha x+\beta} = 0$

b) $g'(x) = 2e^{x+1} + e^{x+1}(2x+3) = (2+2x+3)e^{x+1} = (2x+5)e^{x+1}$

$g'(x) = 0 \Rightarrow (2x+5)e^{x+1} = 0$

$\Rightarrow 2x+5 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-5}{2} = -2,5$

T Vde g

X	$-\infty$		$-2,5$		$+\infty$
g'(x)		$-$	0	$+$	
g(x)	1	↘	$-2e^{-\frac{3}{2}}+1$	↗	$+\infty$

$g\left(-\frac{5}{2}\right) = -2e^{-\frac{3}{2}} + 1 > 0$

g admet un minimum positif donc g est positive

$\forall x \in \mathbb{R}: g(x) > 0$

2a) $f(x) = x - 3 + (2x+1)e^{x+1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x - 3 + (2x+1)e^{x+1} = -\infty - 3 + 0 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x - 3 + (2x+1)e^{x+1} = +\infty - 3 + (+\infty)(+\infty) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} = \dfrac{x-3+(2x+1)e^{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{3}{x} + \left(2 + \frac{1}{x}\right)e^{x+1} = 1 - 0 + \infty = +\infty$

La courbe C de f admet une branche infinie de direction (OY) au voisinage de $+\infty$

c) Montrons que la droite (D) d'équation y=x-3 est une asymptote à (C) au voisinage de$-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - y = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1)e^{x+1} = 0 \Rightarrow$ Que la droite (D) d'équation $y = x - 3$ est une asymptote à (C) au voisinage de$-\infty$

$f(x) - y = (2x+1)e^{x+1}$

$e^{x+1} > 0$ d'où le signe de $f(x) - y$ est celui de $2x+1$

$f(x) - y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

X	$-\infty$		-0,5		$+\infty$
f(x)-y		$-$	0	$+$	
Position relative		Δ/C	B	C/Δ	

$C \cap \Delta = B(-0,5, -3,5)$

3a) $f'(x) = 1 + 2e^{x+1} + e^{x+1}(x+1)$

$= 1 + e^{x+1}(2 + x + 1)$

$= 1 + (2x+1)e^{x+1}$

$f'(x) = g(x > 0$

b) TV de f

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
f'(x)	+
f(x)	$-\infty$ ↗ $+\infty$

4a) f est continue et strictement croissante de ℝ vers J=ℝ d'où f réalise une bijection

b) f réalise une bijection de ℝ vers J et 0∈ J donc il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$

$f(0) = -3 + e \cong -0,3 < 0$; $f(0,1) = 0,7 > 0$

$f(0) \times f(0,1) < 0 \Rightarrow 0 < \alpha < 0,1$

c) $f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha - 3 + (2\alpha + 1)e^{\alpha+1} = 0$

$$\Rightarrow (2\alpha + 1)e^{\alpha+1} = 3 - \alpha$$

$$\Rightarrow e^{\alpha+1} = \frac{3-\alpha}{2\alpha+1}$$

$$\Rightarrow \alpha + 1 = ln\left(\frac{3-\alpha}{2\alpha+1}\right)$$

$$\Rightarrow ln\left(\frac{3-\alpha}{2\alpha+1}\right) - \alpha = 1$$

5a) Test parallèle à l'asymptote oblique $y = x - 3$ ssi $f'(x_0) = 1$

$$\Rightarrow 1 + (2x_0 + 3)e^{x_0+1} = 1$$

$$\Rightarrow (2x_0 + 3)e^{x_0+1} = 0$$

$$\Rightarrow 2x_0 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{-3}{2}$$

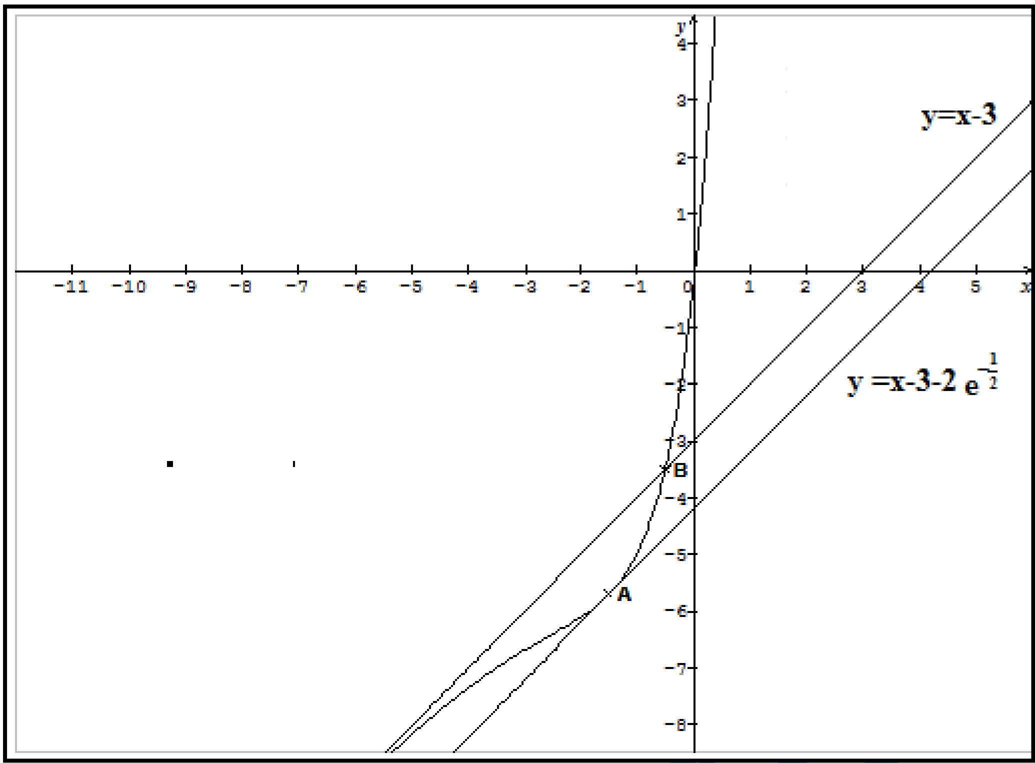
$f(x_0) = f\left(\frac{-3}{2}\right) = -\frac{9}{2} - 2e^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow$ B $\left(\frac{-3}{2}, -\frac{9}{2} - 2e^{\frac{-1}{2}}\right)$

Équation de la tangent T : $y = f'(x_0)\left(x + \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{-3}{2}\right)$

$$y = x + \frac{3}{2} - \frac{9}{2} - 2e^{\frac{-1}{2}}$$

$$y = x - 3 - 2e^{\frac{-1}{2}}$$

b) traçage



c)

$(2x+1)e^{x+1} - m - 3 = 0 \Rightarrow\ m = -3 + (2x+1)e^{x+1}$

$$\Rightarrow x + m = x - 3 + (2x+1)e^{x+1}$$

$$\Rightarrow\ f(x) = x + m$$

Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x + m$ est le nombre d'intersection entre la courbe (C) et la droite (D_m) d'équation $y = x + m$

$$\begin{cases} x \in \left]-\infty, -3 - 2e^{-\frac{1}{2}}\right[: 0 solution \\ m = -3 - 2e^{\frac{-1}{2}} : 1 seule\ solution \\ x \in \left]-3 - 2e^{-\frac{1}{2}}, -3\right[: 2 solutions \\ m = -3 : 1 seule\ solution \\ ]-3, +\infty[: 1 seule\ solution \end{cases}$$

BAC 2014
Session Normale

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2014 session Normale

Exercice 1 (3points)

Une cage contient six pigeons dont quatre femelles et deux pigeons mâles ; parmi ces pigeons, on dispose de deux couples de plumage blanc et de deux femelles de plumage gris. On tire simultanément deux oiseaux de cette cage (les tirages sont équiprobables).

1) on considère les probabilités :

p_1 la probabilité de l'événement A : « Les deux oiseaux tirés son de plumage gris »

p_2 la probabilité de l'événement B : « Les deux oiseaux tirés son de même couleur »

p_3 la probabilité de l'événement C : « Les deux oiseaux tirés son de même sexe »

2) On suppose dans cette question, que le tirage a donné deux oiseaux de même couleur .On note p_4 la probabilité que ces deux oiseaux soient de même sexe.

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Le nombre de tirages possibles est :	6^2	A_6^2	C_6^2
2	La probabilité $p_1$est :	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$
3	La probabilité $p_2$est :	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{8}{15}$
4	La probabilité $p_3$est :	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{7}{15}$
5	La probabilité $p_4$est :	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{7}{15}$

Recopie et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse Aucune justification n'est demandée :

Question N°	1	2	3	4	5
Réponse					

Exercice2 (5points)

On considère Le plan complexe muni d'un repère orthonormé$(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes chacune des équations suivantes:

$(E_1)\quad z^2-2z+17=0 \quad (E_2)\quad z^2+8z+17=0$

2) Pour tout nombre complexe z tel que$z \neq -4-i$, on pose : $f(z)=\frac{z-1+4i}{z+4+i}$

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$Z_A=-4-i$,$Z_B=1-4i$ et $Z_C=4+i$

a) Placer dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points A, B et C ; et déterminer la nature du triangle ABC.

b) Calculer $\alpha=f(-1+4i)$ puis donner son écriture algébrique et trigonométrique.

c)Déterminer puis construire l'ensembleΓ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)|=1$

d) Déterminer puis construire l'ensembleΓ_2 des points M du plan d'affixe z tels le nombre f(z) soit imaginaire pur.

3) on considère la suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0=4+i$,et pour tout entier naturel n ,$z_{n+1}=\frac{\alpha}{2}z_n$ .On appelle M_n le point d'affixe z_n .

a) Calculer z_1, z_2

b) Montrer que la suite de terme général $V_n = |z_n|$ est une suite géométrique.

c) On pose $S_n = OM_0 + OM_1 + \cdots + OM_n$ Donner l'expression de S_n en fonction de n. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Exercice 3 (7points)

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = 2x - 1 + 2e^x$.Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;$\vec{i}$,$\vec{j}$) unité 1cm.

1a) Justifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Calculer et donner une interprétation graphique de : $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (2x - 1))$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α puis vérifier que$-0,3 < \alpha < -0,2$.

3) Construire les courbes (C) et (C') représentant respectivement la fonction f et sa réciproquef^{-1} dans le repère (O ;$\vec{i}$,$\vec{j}$).

4a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en $x_0 = \alpha$

b) Vérifier que : $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{-2\alpha+3}$

5) On considère la suite (U_n)définie pour tout entier naturel n par : $U_n = f(n)$

a) Montrer que (U_n) est la somme de deux suites ; une arithmétique et une géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b) on pose $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ .Donner l'expression de S_n en fonction de n. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Exercice 4(7points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :$g(x) = x - 3 + 3\ln x$

1a) calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g

2a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α puis vérifier que$1,59 < \alpha < 1,60$.

b) En déduire le signe de g sur l'intervalle$]0, +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :$f(x) = \frac{(x-3)\ln x}{x}$

On peut donc aussi écrire :$f(x) = \frac{(x-3)}{x} \ln x$ (1) et $f(x) = \ln x - \frac{3\ln x}{x}$ (2)

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ;$\vec{i}$,$\vec{j}$)

1a) Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \ln x) = 0$

b) Interpréter graphiquement les limites précédentes.

2a) Calculer la dérivée $f'(x)$ .vérifier que $f'(x)$ et g(x) ont le même signe.

b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{-(\alpha-3)^2}{3\alpha}$ et donner une valeur approchée de$f(\alpha)$ à 10^{-1}

c) Dresser le tableau de variation de fonction f.

3a) Déterminer une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses. Tracer (C) et T

c) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation : $2x^2 - mx + x\ln x - 3\ln x = 0$.

4a) **Calculer l'intégrale** $J = \int_1^e \frac{lnx}{x} dx$.

b) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \int_1^e lnx dx$.

c) Justifier que l'aire S du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ **et** $x = e$ **est donnée par** $S = -\int_1^e f(x)dx$ **. Calculer cette aire.**

Fin

Corrigé baccalauréat 2014 Session Normale

Exercice 1

Question N°	1	2	3	4	5
Réponse	C	B	B	C	B

Corrigé Exercice 2

1) $(E_1)\quad z^2 - 2z + 17 = 0$

$\Delta = 4 - 68 = -64 = 64i^2 = (8i)^2$

$$z_1 = \frac{2 - 8i}{2} = 1 - 4i$$

$z_2 = 1 + 4i$

$S_1 = \{1 - 4i\,, 1 + 4i\}$

$(E_2)\quad z^2 + 8z + 17 = 0$

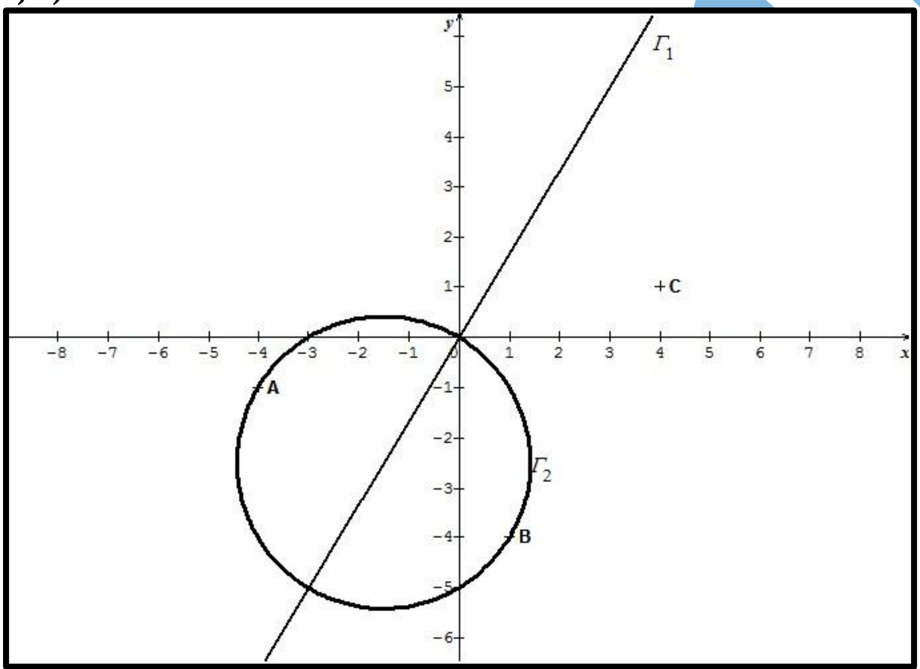
$\Delta = 64 - 68 = -4 = 4i^2 = (2i)^2$

$$z_3 = \frac{-8 - 2i}{2} = -4 - i$$

$z_4 = -4 + i$

$S_2 = \{-4 - i\,, -4 + i\}$

2) a)



Démontrons que le triangle ABC est isocèle rectangle en B

on pose :

$$K = \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$$

$$= \frac{-4 - i - 1 + 4i}{4 + i - 1 + 4i}$$

$$= \frac{-5 + 3i}{3 + 5i}$$

$$= \frac{(-5 + 3i)(3 - 5i)}{(3 + 5i)(3 - 5i)}$$

$$= \frac{-15+25i+9i+15}{9+25} = \frac{34i}{34} = i$$

$$K = i \quad \Rightarrow \begin{cases} |K| = 1 \Rightarrow \frac{BA}{BC} = 1 \\ argK = \frac{\pi}{2}[2\pi] \Rightarrow \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$\Rightarrow$ **Le triangle ABC est isocèle rectangle en B**

b) $\alpha = f(-1+4i)$

$$\alpha = \frac{-1+4i-1+4i}{-1+4i+4+i}$$

$$= \frac{-2+8i}{3+5i}$$

$$= \frac{(-2+8i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)}$$

$$= \frac{-6+10i+24i+40}{9+25}$$

$$= \frac{34+34i}{34}$$

$$\alpha = 1+i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$$

c) $|f(z)| = 1 \Rightarrow$

$$\left|\frac{z-1+4i}{z+4+i}\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{Z_M - Z_B}{Z_M - Z_A}\right| = 1 \Rightarrow \frac{BM}{AM} = 1 \Rightarrow \mathbb{\Gamma}_1 \; \textit{est la médiatrice du } [AB]$$

d) $f(z)$ **est imaginaire pur ssi** $\begin{cases} f(z) = 0 \; ou \\ argf(z) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \Rightarrow \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbb{\Gamma}_2$**Le cercle de diamètre**$[AB]$ **privé de A**

3)

$$z_{n+1} = \frac{\alpha}{2} z_n = \frac{(1+i)}{2} z_n$$

a)

$$z_1 = \frac{(1+i)}{2} z_0$$

$$z_1 = \frac{(1+i)(4+i)}{2} = \frac{4+i+4i-1}{2} = \frac{3+5i}{2}$$

$$z_2 = \frac{(1+i)}{2} z_1 = \frac{(1+i)}{2}\left(\frac{3+5i}{2}\right) = \frac{(1+i)(3+5i)}{4} = \frac{3+5i+3i-5}{4} = \frac{-2+8i}{4}$$

$$z_2 = \frac{-1+4i}{2}$$

b) $V_n = |z_n| \Rightarrow V_{n+1} = |z_{n+1}|$

$$V_{n+1} = \left|\frac{(1+i)}{2} z_n\right|$$

$$= \left|\frac{1+i}{2}\right| |z_n|$$

$$V_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} V_n$$

V_n**est une suite géométrique de raison** $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

et de premier terme $V_0 = |z_0| = |4+i| = \sqrt{17}$

c) $S_n = OM_0 + OM_1 + \cdots + OM_n$

$= |z_0| + |z_1| + \cdots + |z_n|$
$= V_0 + V_1 + \cdots + V_n$
est la somme de $(n+1)$ terme d'un suite géométrique

$$S_n = \frac{\sqrt{17}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{\sqrt{17}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{2\sqrt{17}}{2-\sqrt{2}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{17}}{2-\sqrt{2}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{2\sqrt{17}}{2-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{17}(2+\sqrt{2})}{4-2} = \sqrt{17}(2+\sqrt{2})$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 2\sqrt{17}+\sqrt{34}$$

Exercice 3

$f(x) = 2x - 1 + 2e^x.$

. 1a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x-1+2e^x) = -\infty - 1 + 0 = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x-1+2e^x) = +\infty - 1 + \infty = +\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} \big(f(x)-(2x-1)\big) = \lim_{x\to-\infty} (2x-1+2e^x-2x+1) = \lim_{x\to-\infty} 2e^x = 0 \Rightarrow$ **la courbe (C) admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x-1$ au voisinage de $-\infty$**

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x-1+2e^x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(2-\frac{1}{x}+2\frac{e^x}{x}\right) = 2 - 0 + \infty. \Rightarrow$ **la courbe (C) admet une branche infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$**

2a) $f'(x) = 2 + 2e^x > 0$

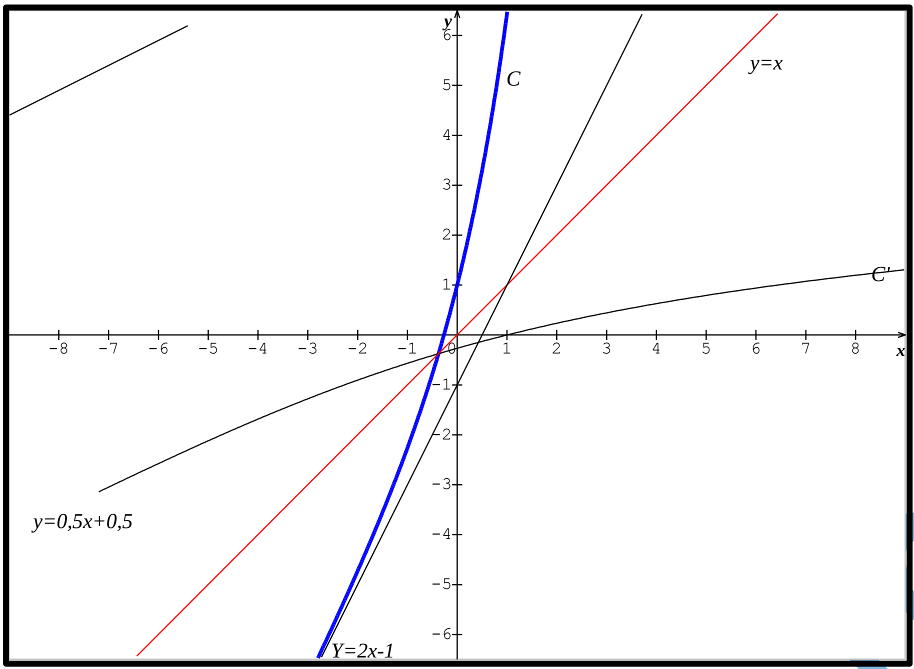
x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

b) f est continue et strictement croissante de ℝ vers J=ℝ d'où f réalise une bijection

c) f réalise une bijection de ℝ vers J et 0∈ J donc il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$

$f(-0,3) \approx -0,11 < 0$; $f(-0,2) \approx 0,23 > 0$

$f(-0,3) \times f(-0,2) < 0 \Rightarrow -0,3 < \alpha < -0,2$



4a)

$f(\alpha)=0 \Rightarrow\ 2\alpha-1+2e^{\alpha}=0 \Rightarrow 2e^{\alpha}=-2\alpha+1$

$f'(\alpha)=2+2e^{\alpha}$ remplaçons $2e^{\alpha}$ par $-2\alpha+1 \Rightarrow$

$f'(\alpha)=2-2\alpha+1=3-2\alpha$

$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha) \Rightarrow y=(3-2\alpha)(x-\alpha)=(3-2\alpha)x-\alpha(3-2\alpha)$

b) $f(\alpha)=0 \Rightarrow f^{-1}(0)=\alpha$

$$(\mathrm{f}^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(0))}=\frac{1}{f'(\alpha)}=\frac{1}{3-2\alpha}$$

5a) $U_n=f(n)=2n-1+2e^{n}=v_n+w_n$

U_n est la somme de deux suites l'une arithmétique $v_n=2n-1$ de raison $r=2$ et de premier terme $v_0=-1$

et l'autre géométrique définie par $w_n=2e^{n}$ de raison $q=e$ et de premier terme $w_0=2$

b) $S_n=U_0+U_1+\cdots+U_n=S_{V_n}+S_{W_n}$

$$=\frac{(n+1)(V_0+v_n)}{2}+\frac{w_0}{1-q}(1-q^{n+1})$$

$$S_n=\frac{(n+1)(-1+2n-1)}{2}+\frac{2}{1-e}(1-e^{n+1})$$

$$S_n=\frac{(n+1)(2n-2)}{2}+\frac{2}{1-e}(1-e^{n+1})$$

$$S_n=\frac{2n^2-2n+2n-2}{2}+\frac{2}{1-e}(1-e^{n+1})$$

$$S_n=\frac{2n^2-2}{2}+\frac{2}{1-e}(1-e^{n+1})$$

$$S_n=n^2-1+\frac{2}{1-e}(1-e^{n+1})$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty} n^2-1+\frac{2}{1-e}(1-e^{n+1})=+\infty-1+\infty=+\infty$$

Exercice 4

$g(x)=x-3+3lnx$

1a) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x - 3 + 3lnx = 0 - 3 - \infty = -\infty$

, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x - 3 + 3lnx = +\infty - 3 + \infty = +\infty$

b)$g'(x) = 1 + \frac{3}{x} > 0$

x	0		$+\infty$
g'(x)	‖	+	
g(x)	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2a) g est continue et strictement croissante de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$ donc il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$

$g(1,59) \approx -0,0187 < 0$ et $g(1,60) \approx 0,010 > 0$

$g(1,59) \times g(1,60) < 0 \Rightarrow 1,59 < \alpha < 1,60$

b) Signe de g :

X	0		α		$+\infty$
g(X)	‖	-	0	+	

Partie B

1a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(x-3)lnx}{x} = -3 \times (-\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} lnx - \frac{3lnx}{x} = +\infty - 0 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - lnx) = \lim\limits_{x\to +\infty} lnx - \frac{3lnx}{x} - lnx = \lim\limits_{x\to +\infty} -\frac{3lnx}{x} = -3 \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}$ f(x)= $+\infty \Rightarrow$ la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - lnx) = 0 \Rightarrow$ la fonction $h(x) = lnx$ est asymptote à f au voisinage de $+\infty$

2a) $f(x) = lnx - \frac{3lnx}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \left(\frac{\frac{3}{x} \times x - 3lnx}{x^2}\right) = \frac{1}{x} - \left(\frac{3 - 3lnx}{x^2}\right) = \frac{x}{x^2} - \left(\frac{3 - 3lnx}{x^2}\right) = \frac{x - 3 + 3lnx}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

$x^2 > 0 \Rightarrow$ le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

b) $g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha - 3 + 3ln\alpha = 0$

$\Rightarrow 3ln\alpha = 3 - \alpha$

$\Rightarrow ln\alpha = \frac{3-\alpha}{3}$

$$f(\alpha) = \frac{(\alpha - 3)ln\alpha}{\alpha} = \frac{(\alpha - 3)\left(\frac{3-\alpha}{3}\right)}{\alpha} = \frac{(\alpha - 3)\left(\frac{3-\alpha}{3}\right)}{\alpha} = \frac{(3-\alpha)(\alpha - 3)}{3\alpha}$$

$$= \frac{-(\alpha - 3)(\alpha - 3)}{3\alpha}$$

$$f(\alpha) = -\frac{(\alpha - 3)^2}{3\alpha}$$

$f(\alpha) \approx -0,4$

c)

x	0		α		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	f(α)	↗	$+\infty$

3a)$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f'(1) = -2$ **.** $f(1) = 0$ **,les coordonnées du point A(1,0***)*

Équation de la tangente T en A **:**$y = -2(x-1) = -2x + 2$

b) Intersection de (C) avec (OX) $\Rightarrow$ $f(x) = 0 \Rightarrow$

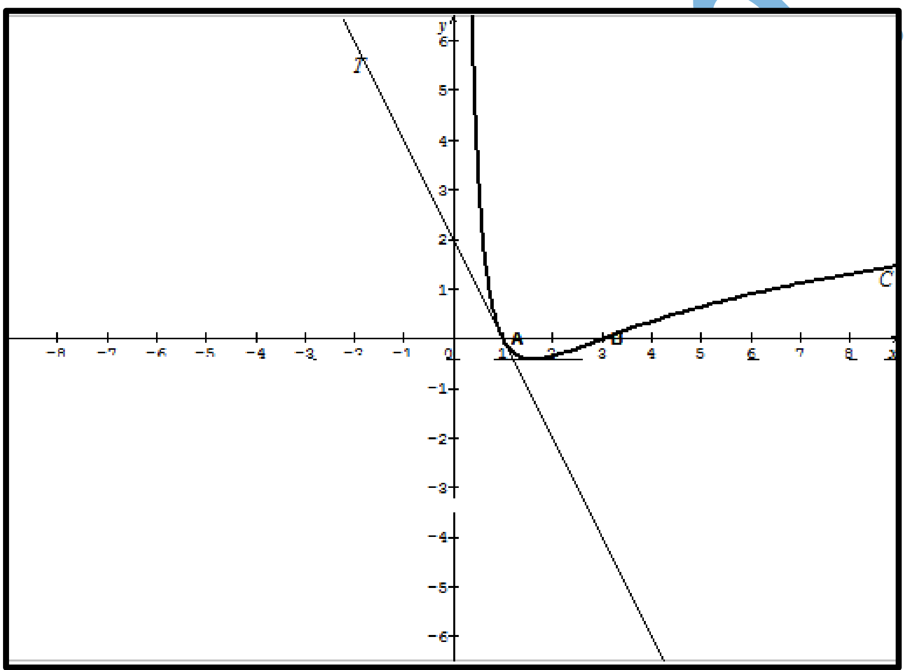
$$\frac{(x-3)lnx}{x} = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)lnx = 0$$

$$\begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ ou\ lnx = 0 \Rightarrow\ x = 1 \end{cases}$$

$$S = \{1, 3\}$$

Les coordonnées des points d'intersections de (C) avec (OX) sont :$A(1,0)$ et $B(3,0)$



c) $2x^2 - mx + xlnx - 3lnx = 0$

$mx = 2x^2 + xlnx - 3lnx$

$$m = \frac{2x^2 + xlnx - 3lnx}{x}$$

$$m = 2x + lnx - \frac{3lnx}{x}$$

$$-2x + m = lnx - \frac{3lnx}{x}$$

$-2x + m = f(x)$

Les solutions de l'équation$f(x) = -2x + m$ **sont les abscisses des points d'intersections entre la courbe (C) de f et la droite** (D_m) **d'équation** $y = -2x + m$

m	$-\infty$		2		$+\infty$
nombre de solutions		0 solution	1solution	2solutions	

4a)

$$J=\int_1^e \frac{lnx}{x}dx=\left[\frac{(lnx)^2}{2}\right]_1^e=\frac{1}{2}$$

b) calcukons I à l'aide d'une I .P.P

$$I=\int_1^e lnxdx$$

On pose $\begin{cases} u=lnx\Rightarrow u'=\frac{1}{x} \\ v'=1\Rightarrow v=x \end{cases}$

$$I=[xlnx]_1^e-\int_1^e dx$$

$$I=e-[x]_1^e$$

$$I=e-e+1$$

$$I=1$$

c)signe de f

x	0		1		3		$+\infty$
lnx		-	0	+		+	
x-3		-		-	0	+	
f(x)		+	0	-	0	+	

sur $[1,e]$ $f(x)\le 0\Rightarrow S=-\int_1^e f(x)dx$

$$S=-\int_1^e f(x)dx=-\left(\int_1^e lnxdx-3\int_1^e \frac{lnx}{x}dx\right)$$

$$S=-(I-3J)$$

$$S=-\left(1-\frac{3}{2}\right)$$

$$S=\frac{1}{2}$$

BAC 2014
Session Compl.

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 201 4 session Complémentaire

Exercice 1 (3 points)

Un questionnaire à choix multiples (QCM) comporte 8 questions indépendantes. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées dont une seule correcte. Un élève répond au hasard à chaque question du QCM. On note X le nombre de réponses correctes qu'il a données. On considère les événements suivants :

A : L'élève a toutes les réponses correctes.
B : L'élève n'a aucune réponse correcte.
C : L'élève a au moins une réponse correcte.
D : L'élève a exactement deux réponses correctes.

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	L'ensemble de valeurs de X est :	$\{0,1,2,...,8\}$	$\{0,1,...,4\}$	$\{1,2,...,8\}$
2	La probabilité de l'événement A est :	$\frac{1}{4}\times 8$	$\left(\frac{1}{4}\right)^8$	$\left(\frac{1}{8}\right)^8$
3	La probabilité de l'événement B est :	$1-\left(\frac{1}{4}\right)^8$	$\left(\frac{3}{4}\right)^8$	$1-\left(\frac{7}{8}\right)^8$
4	La probabilité de l'événement C est :	$1-\left(\frac{1}{4}\right)^8$	$\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^7$	$1-\left(\frac{3}{4}\right)^8$
5	La probabilité de l'événement D est :	$C_8^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^6$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2$	$1-\left(\frac{3}{4}\right)^6$
6	Le nombre de réponses correctes de l'élève, que l'on peut espérer est :	8	6	2

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse.

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On considère les nombres : $z_1=\frac{-1+7i}{3+4i}$, $z_2=(1+i)^2$ et $z_3=\frac{4-8i}{1+3i}$.

a) Donner la forme algébrique de chacun des nombres z_1, z_2 et z_3.

b) Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres z_1, z_2 et z_3.

2.a) Placer dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=1+i$, $z_B=2i$ et $z_C=-2-2i$.

b) Montrer que le triangle ABC est rectangle .

c) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M d'affixe z tel que : $\left|\frac{z+2+2i}{z-2i}\right|=1$.

d) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme. Placer D.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+2z+10=0$.

Exercice 3(5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x^2+2x+1)e^x$

Soit C sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $1cm$.

1.a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$. Interpréter graphiquement.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2.a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que la courbe C admet deux tangentes horizontales que l'on déterminera.

b) Dresser le tableau de variation f.

3) Déterminer l'intersection de C avec les axes des coordonnées puis construire C dans $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Donner une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0 et calculer $(g^{-1})'(1)$.

5.a) Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction définie par $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=-1$ et $x=0$.

Exercice 4(7 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=2-x-\ln x$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g.

2.a) Montrer que g réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $]0;+\infty[$ une unique solution α. Vérifier que $1,55\le\alpha\le1,56$

c) En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=(1-\frac{1}{x})(1-\ln x)$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Démontrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

b) Interpréter graphiquement les limites précédentes.

2.a) Calculer la dérivée $f'(x)$. Vérifier que pour tout réel x de $]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

b) Montrer que $f(\alpha)=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ et donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-1} près.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses. Tracer (C).

4.a) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale $I=\int_1^x \ln t\,dt$.

b) En remarquant que $f(x)=1-\ln x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\ln x$, donner une primitive F de f sur $[1;+\infty[$.

c) Calculer l'aire S du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Fin

Corrigé baccalauréat 2014 session complémentaire

Exercice 1 :

Question N°	1	2	3	4	5	6
Réponse	A	B	B	C	A	C

Exercice 2 :

1° a) $z_1 = \dfrac{-1+7i}{3+4i} = \dfrac{(-1+7i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{25+25i}{25} = 1+i$.

$z_2 = (1+i)^2 = 1+2i-1 = 2i$.

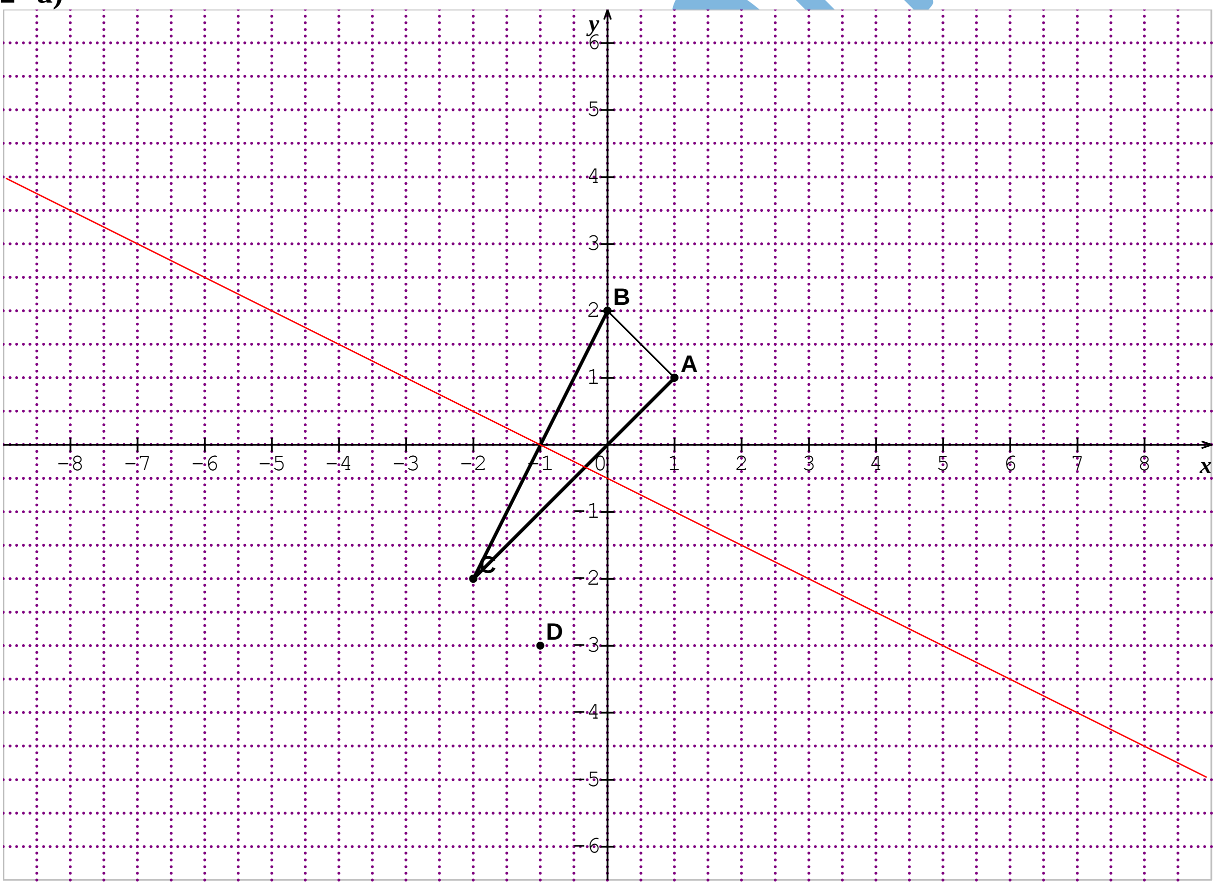
$z_3 = \dfrac{4-8i}{1+3i} = \dfrac{(4-8i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \dfrac{-20-20i}{10} = -2-2i$.

b) $z_1 = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$z_2 = 2(0+i) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

$z_3 = 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$.

2° a)



b) On a : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{2i-1-i}{-2-2i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{-2(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{-4} = -\frac{1}{2}i$;

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \arg\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \arg\left(-\frac{1}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Le triangle ABC est rectangle en A.

c) $M \in \Delta \Leftrightarrow \frac{|z-(-2-2i)|}{|z-2i|} = \frac{MC}{MB} = 1$. L'ensemble est la médiatrice du segment $[BC]$.

d) $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A$
$z_D = -2-2i-2i+1+i = -1-3i$.

3° 1° Résolution de : $z^2+2z+10=0$. $\Delta' = (1)^2 - 1\times 10 = -9 = (3i)^2$; $z_1 = -1+3i$ et $z_2 = -1-3i$.

Exercice 3 :

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2+2x+1)e^x$.

1° a) Écrivons $f(x) = x^2e^x + 2xe^x + e^x$. On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ ainsi que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ (Limites remarquables).

On peut écrire $x^2e^x = \left(xe^{\frac{x}{2}}\right)^2$. En posant $t = \frac{x}{2}$, on trouve $x^2e^x = \left(2te^t\right)^2$ ($x\to-\infty \Leftrightarrow t\to-\infty$). Il vient : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = \left(2\lim\limits_{t\to-\infty} te^t\right)^2 = 0$; soit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. La droite d'équation : $y=0$ est une asymptote horizontale à (C), en $-\infty$.

b) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On peut écrire $\frac{f(x)}{x} = \left(x+2+\frac{1}{x}\right)e^x$ et

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2+\frac{1}{x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty$. On en déduit que la branche infinie en $+\infty$ est de direction (Oy).

2° a) $f'(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x+1)e^x = (x^2+4x+3)e^x$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$
$x^2+4x+3 = 0 \Leftrightarrow (x=-3 \text{ ou } x=-1)$

(C) admet deux tangentes horizontales aux points d'abscisses $x=-3$ et $x=-1$ d'équations respectives : $y = \frac{4}{e^3}$ et $y=0$.

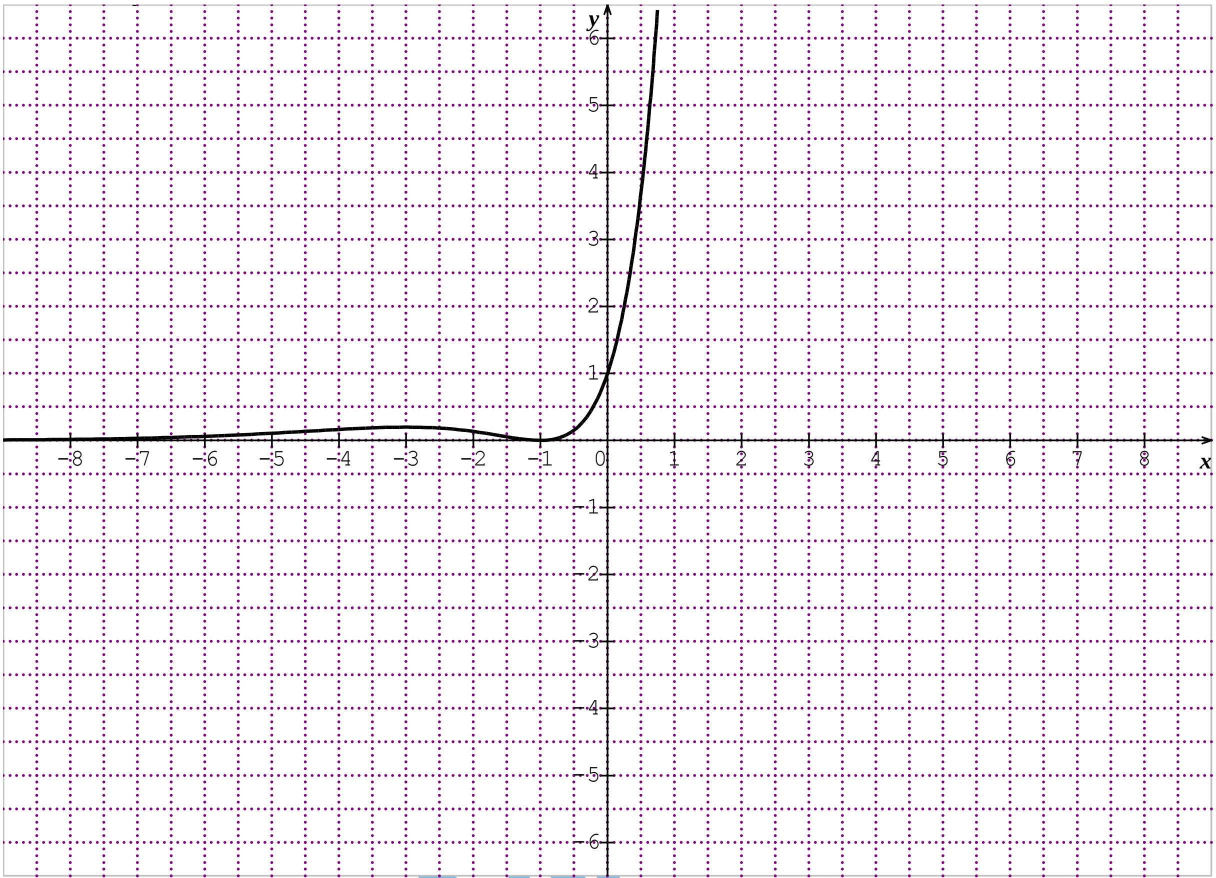
b) Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3°) $f(0)=1$ donc $(C)\cap(y'Oy)=\{A(0,1)\}$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ donc $(C)\cap(x'Ox)=\{B(-1,0)\}$.

Tracé de (C).



4° a) La fonction g est continue et strictement croissante de $I=[0,+\infty[$ sur $J=[1,+\infty[$, donc elle réalise une bijection de I sur J.

b) On a : $y=f'(0)(x-0)+f(0)=3x+1$; $g(0)=1\Leftrightarrow g^{-1}(1)=0$ donc $\left(g^{-1}\right)'(1)=\dfrac{1}{g'(0)}=\dfrac{1}{3}$.

5° a) Soit $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^x$ telle que $F'(x)=f(x)$.

$F'(x)=(2ax+b)e^x+\left(ax^2+bx+c\right)e^x=\left(ax^2+(2a+b)x+b+c\right)e^x$. En identifiant avec l'expression de $f(x)$, on trouve : $\begin{cases}a=1\\2a+b=2\\b+c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\\c=1\end{cases}$. Donc $F(x)=\left(x^2+1\right)e^x$.

b) L'aire en unités d'aire est : $A=\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_{-1}^{0}=F(0)-F(-1)=1$.

Exercice 4 :

Partie A : g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x)=2-x-\ln x$

1° a) On a : $\lim\limits_{x\to0^+}(2-x)=2$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{n\to0^+}g(x)=+\infty$.

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = -1 - \frac{1}{x} < 0$

.

x		0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$		$-$
$g(x)$		$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

2° a) La fonction g est continue et strictement décroissante de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $J = \mathbb{R}$.

b) On a $0 \in \mathbb{R}$, il existe α unique de $]0,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$. Comme $g(1{,}55) \times g(1{,}56) < 0$.

c) Le signe de $g(x)$ est :

x		0		α		$+\infty$
$g(x)$			$+$	0	$-$	

Partie B

f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(1 - \ln x)$

1° a) On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 - \ln x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to 0^+} f(x) = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = (1) \times (-\infty) = -\infty$.

On a : $\frac{f(x)}{x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = (1) \times (0) = 0$.

b) La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale.

La branche infinie, en $+\infty$, est de direction (Ox).

2° a) $f'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{2 - x - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$.

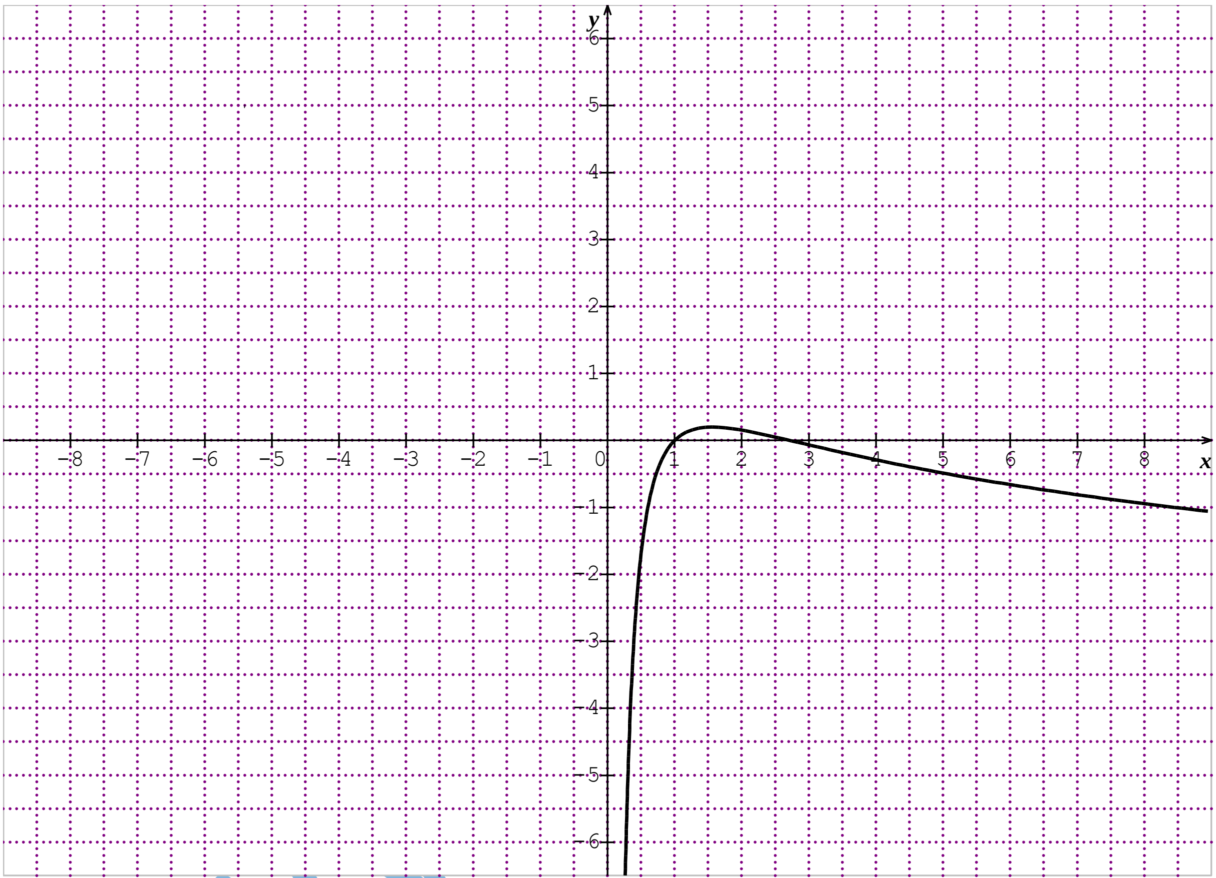
b) On a : $f(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(1 - \ln \alpha)$; Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2 - \alpha - \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 2 - \alpha$. Par suite $f(\alpha) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)(1 - 2 + \alpha) = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$.

c) Le TV de f :

x		0		α		$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

3° On résout l'équation $f(x)=0 \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{x}\right)(1-\ln x)=0 \Leftrightarrow (x=1 \text{ ou } x=e)$.

$(C)\cap(Ox)=\{A(1,0);B(e,0)\}$



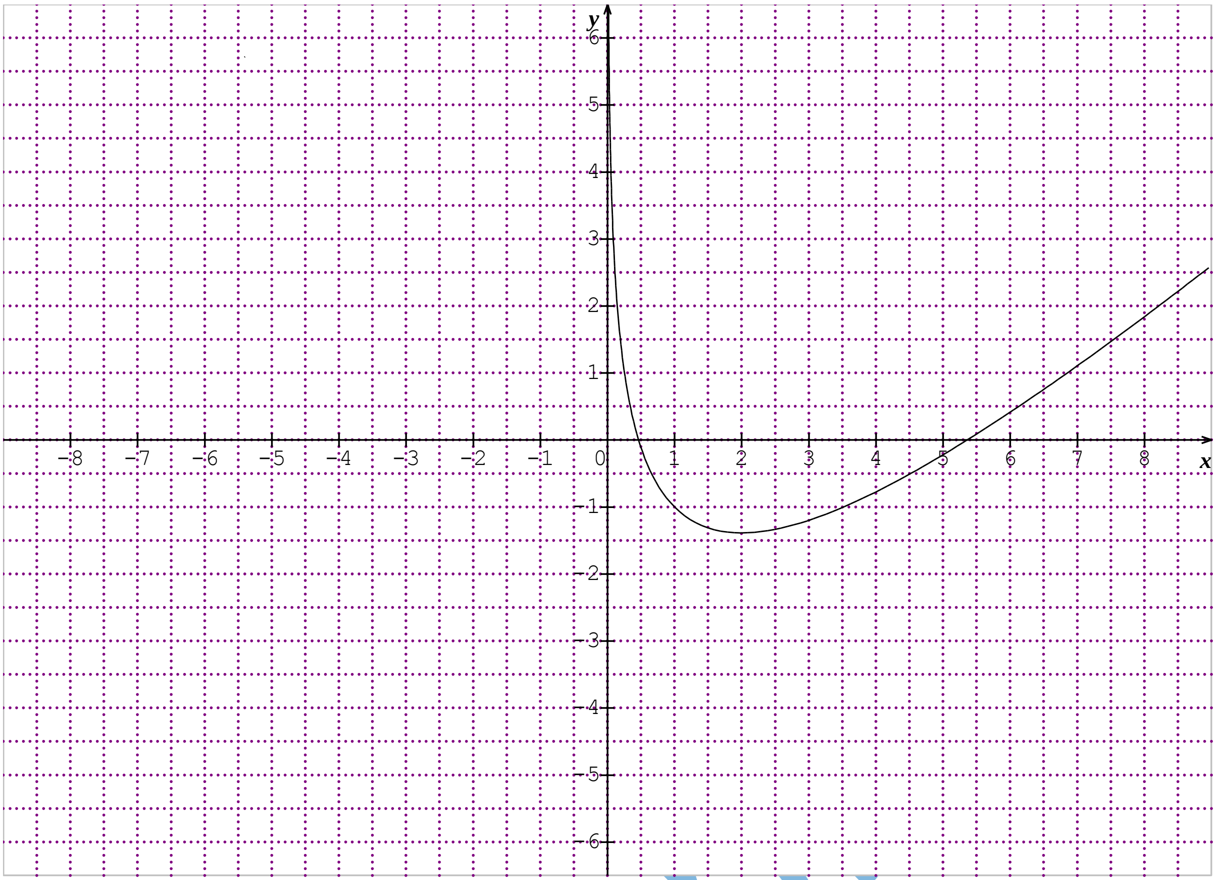
4° a) Soit $\int_1^x \ln t\,dt$. **On procède par intégration par parties en posant :** $\begin{cases} u'(t)=1 \\ v(t)=\ln t \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} u(t)=t \\ v'(t)=\frac{1}{t} \end{cases}$. $\int_1^x \ln t\,dt=[t\ln t]_1^x-\int_1^x dt = x\ln x-[t]_1^x = x\ln x - x+1$

b) Une primitive de f est $F(x)=\int_1^x\left(1-\ln t-\frac{1}{t}+\frac{1}{t}\ln t\right)dt = 2x-x\ln x-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$

c) L'aire demandée est : $S=\int_1^e f(x)\,dx=[F(x)]=F(e)-f(1)$.

Donc $S=2e-e-1+\frac{1}{2}-2=e-\frac{5}{2}$ **ua**



b) L'équation $2x-2-m-2\ln x=0 \Leftrightarrow x-2-2\ln x=-x+m \Leftrightarrow f(x)=-x+m$. Toute solution de l'équation est l'abscisse d'un point commun à (C) et la droite $D_m : y=-x+m$.

Valeurs de m	Nombre de solutions
$m<0$	0
$m=0$	1 une solution double
$m>0$	2

7° a) Soit $\int_1^2 \ln x dx$. On procède par intégration par parties en posant : $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\ln x \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$. $\int_1^2 \ln x dx = [x\ln x]_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - [x]_1^2 = 2\ln 2 - 1$

b) L'aire demandée est $A=-\int_1^2 f(t)dt = -\int_1^2 (t-2-2\ln t)dt \Leftrightarrow$

$$A=-\left[\frac{1}{2}(t-2)^2\right]_1^2 + 2\int_1^2 \ln x dx = \frac{1}{2}+2(2\ln 2-1) = -\frac{3}{2}+4\ln 2 \text{ ua}.$$

Exercice 4:

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=xe^x-1$

1° a) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$, limite remarquable, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-1$. Aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$.

b) $g'(x)=1\times e^x + x\times e^x - 0 = (1+x)e^x$. $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-1-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

2° a) L'expression $g(x)$ est strictement négative sur $]-\infty,-1]$ tandis que g réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur $\left[-1-\frac{1}{e},+\infty\right[$, donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α. Comme $g(0.5)\times g(0.6)<0$, alors $0.5<\alpha<0.6$.

b) D'après le TV de g on a : $g(]-\infty,\alpha])=\left[-1-\frac{1}{e},0\right]$ donc, si $x\le\alpha$ alors $g(x)\le 0$ et $g([\alpha,+\infty[)=[0,+\infty[$ donc, si $x\ge\alpha$ alors $g(x)\ge 0$.

3° La fonction f est définie sur $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{e^x-x}{x+1}$

a) On a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^-}(e^x-x)=1-\frac{1}{e}>0\\ \lim\limits_{x\to-1^-}(x+1)=0^-\end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$; On a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^+}(e^x-x)=1-\frac{1}{e}>0\\ \lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)=0^+\end{cases}$ donc

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$ ce qui veut dire que la droite d'équation : $x=-1$ est une asymptote verticale

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x}{x+1}-1+\dfrac{1}{x+1}\right)=-1$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x}{x+1}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=0$ ce qui s'interprète par le fait que la droite d'équation : $y=-1$ est une asymptote horizontale en $-\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}\times\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x}{x+1}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=1$.

On peut écrire $\dfrac{f(x)}{x}=\left(\dfrac{e^x}{x^2}\times\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$. Or $\dfrac{e^x}{x^2}=\dfrac{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2}{4\times\frac{x^2}{4}}=\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)^2$. On pose $t=\dfrac{x}{2}$ alors $(x\to+\infty\Leftrightarrow t\to+\infty)$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{e^t}{t}\right)^2\times\dfrac{2t}{2t+1}-\dfrac{1}{2t+1}\right)=+\infty$.

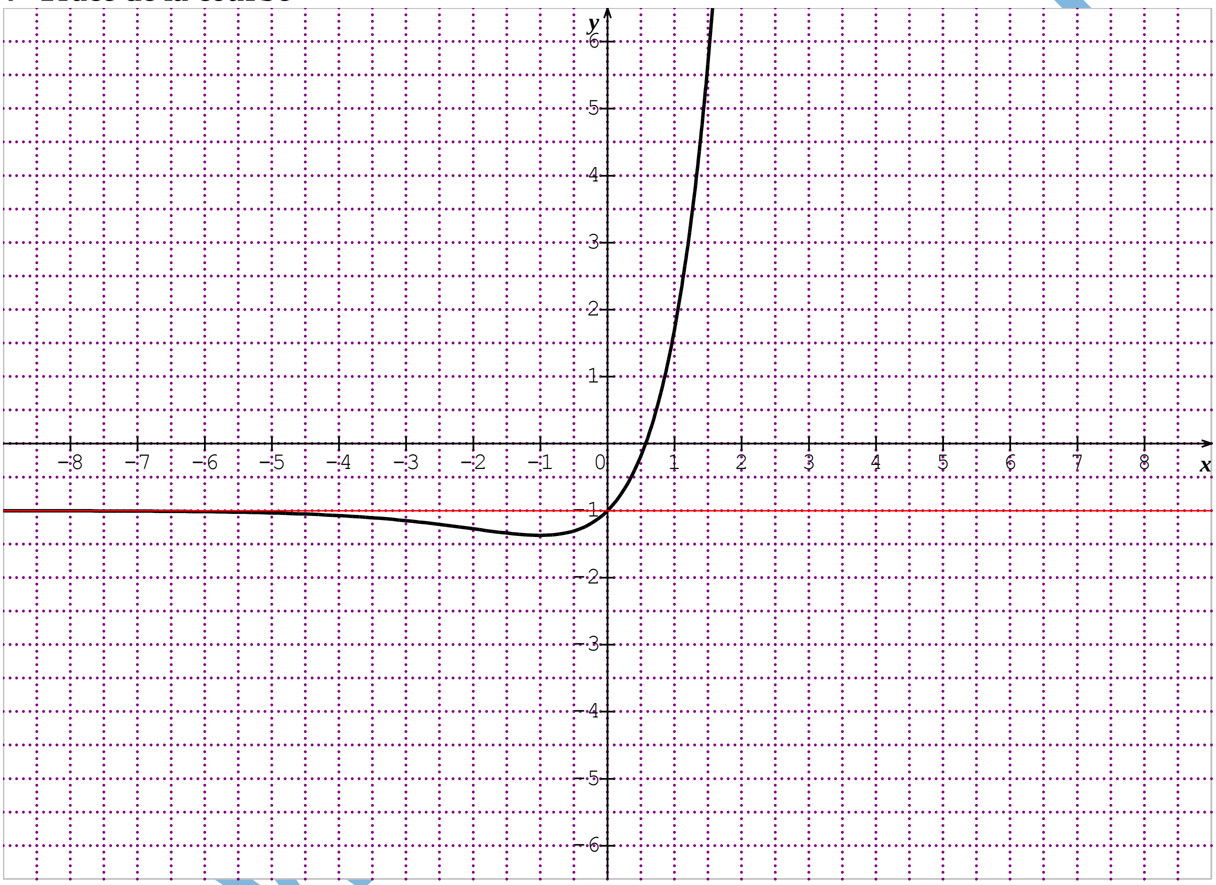
On en déduit que la branche infinie en $+\infty$ est de direction (Oy).

b) $f'(x)=\dfrac{(e^x-1)(x+1)-1\times(e^x-x)}{(x+1)^2}=\dfrac{xe^x+e^x-x-1-e^x+x}{(x+1)^2}=\dfrac{xe^x-1}{(x+1)^2}$ ou encore $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.

c) Tableau de variation de f .

d) On a : $f(\alpha)=\dfrac{e^\alpha-\alpha}{\alpha+1}$; Or $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha e^\alpha-1=0 \Leftrightarrow e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$. Par suite $f(\alpha)=\dfrac{\frac{1}{\alpha}-\alpha}{\alpha+1}=\dfrac{1-\alpha^2}{\alpha^2+\alpha}$.

4° Tracé de la courbe



BAC 2015
Session Normale

Baccalauréat 2015 session normale

Exercice 1

Une usine fabrique une série de montres .Au cours de la fabrication peuvent apparaitre deux types de défauts, désignés par a et b, On a constaté que 6% des montres fabriquées présentent le défaut a (et peut- être aussi le défaut b), 5% le défaut b (et peut- être aussi le défaut a), 2% présentaient simultanément les défauts a et b .

Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les événements suivants :

A « La montre tirée présente le défaut a »

B « La montre tirée présente le défaut b »

C « La montre tirée ne présente aucun des deux défauts »

D « La montre tirée présente un et un seul des deux défauts »

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci –après, une seule réponse est exacte

N0	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	La probabilité P(A) est :	0, 6	0,06	6
2	La probabilité P(C) est :	0,91	0,89	0,87
3	La probabilité P(D) est :	0,05	0,07	0,98
4	La probabilité $P_B(A)$ est :	0, 4	0,04	0,3
5	La probabilité $P_{\bar{A}}(B)$ est :	$\frac{3}{96}$	$\frac{91}{94}$	$\frac{3}{94}$
6	La probabilité $P_D(A)$ est :	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{6}{7}$

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2

1) Pour tout nombre complexe z on pose ;$p(z) = z^3 - 10z^2 + 33z - 34$

a)$P(2)$.

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a : $p(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes ; l'équation $p(z) = 0$ On note $z_0; z_1$ et z_2 les solutions de (E) telles que$I_m(z_2) < I_m(z_0) < I_m(z_1)$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{U}, \vec{V})$ .Soient les points A, B et C d'affixes respectives :$z_A = z_1 + 3i$ et $z_B = z_2 + i$ et $z_C = 6 + 2i$

a) Vérifier que $z_A = 4 + 4i$ et$z_B = 4$.

b) Ecrire les nombres z_A et z_B sous forme trigonométrique

c)Placer les points A, B et C dans le repère.

3) Pour tout nombre $z \neq 4 + 4i$ on pose :$f(z) = \frac{z-4}{Z-4-4i}$

a) Vérifier que $f(z_c) = i$ et interpréter graphiquement

b) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$

c) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur

4) pour tout entier naturel n, on pose $z_n = (Z_A)^n$ et soient M_n le point d'affixez_n .

a) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels le point M_n appartient à l'axe des abscisses

b) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels on a$OM_n > 2015$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :$\begin{cases} f(x) = 3x - 3 - 2x\ln x, x > 0 \\ f(0) = -3 \end{cases}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm

1a) Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ .En déduire que f est continue à droite de $x_0 = 0$

b) Montrer que $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$ et interpréter graphiquement

c) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$ et vérifier que $f'(\sqrt{e}) = 0$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f

3a) Déterminer une équation de la (T) à (C) au point A d'abscisse $x_0 = 1$

b) Montrer que (C) coupe l'axe des abscisses (OX) en un point B autre que A dont l'abscisse α est telle que $2.3 \le \alpha \le 2.4$

c) Déduire de ce qui précède le signe de f(x) sur $[0,+\infty[$

4) On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x.^2\, lnx; x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

a)Montrer que pour tout $x > 0, f(x) = 3x - 3 + g'(x)$

b) En déduire une primitive F de f sur $]0,+\infty[$

5) Pour tout entier naturel $n \ge 1$ on pose :$U_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$

a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

b) Exprimer U_n en fonction de n

c) $\lim_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)(1+e^x)$

Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1a) Justifier que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement

b) Calculer $\lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - (x-2)\right)$ et donner une interprétation graphique

2a) Calculer la dérivée $f'(x)$ puis la dérivée seconde $f''(x)$

b) En déduire que la courbe (C) possède un point d'inflexion A dont on précisera les coordonnées.

c) Dresser le tableau de variation de la dérivéef'. E n déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel x.

3a) A l'aide des questions précédentes, dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera .On désigne par (c') la courbe représentative de la réciproquef^{-1} dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

4a) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C) avec les axes des coordonnées.

b) Déterminer le point B de (C) Où la tangente T est parallèle à l'asymptote (D) .Donner une équation de T

c) Tracer (C) ,(T) ,(D) et (C')

d) Discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x - 2 = (2+m)e^{-x}$.

5a) Calculer l'intégrale $I = \int_0^2 (x - 2 - 2e^x)dx$.

b) En utilisant une intégration par parties, calculer $J = \int_0^2 xe^x\, dx$

c) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$

Fin

BAC 2016
Session Normale

Baccalauréat 2016 session normale

Exercice 1

Des études statistiques sur les examens de fin d'année universitaire ont monté que :
10 % d'une population estudiantine donnée possède un ordinateur.
La probabilité qu'un étudiant possédant un ordinateur réussisse est 0,8.
La probabilité qu'un étudiant ne possédant pas un ordinateur réussisse est 0,3.
On choisit au hasard un étudiant dans cette population .On note M l'événement « l'étudiant choisi possède un ordinateur » et R l'événement « l'étudiant choisi réussit »
Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après , une seule est exacte .

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	La probabilité P(M)est :	0 ,6	0 ,9	0 ,1
2	La probabilité $p_M(R)$ est :	0 ,8	0 ,9	0 ,7
3	La probabilité $P(M \cap R)$ est :	0 ,09	0 ,08	0 ,07
4	La probabilité $P(\overline{M} \cap R)$ est :	0 ,27	0 ,29	0 ,31
5	La probabilité $p(R)$ est :	0 ,25	0 ,35	0 ,45
6	La probabilité $p_R(M)$ est :	$\frac{13}{35}$	$\frac{11}{35}$	$\frac{8}{35}$

Recopie et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse Aucune justification n'est demandée :

Question N°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

EXERCICE2

1) Pour tout nombre complexe z on pose : $p(z) = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$

a)Calculer $p(1)$.

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a : $p(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$.

c) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes ; l'équation (E) $p(z) = 0$.

On note z_0, z_1 et z_2 les solutions(E) telle que $I_m(z_1) \prec I_m(z_0) \prec I_m(z_2)$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé$(O;\vec{u},\vec{v})$

Soient A, B et C d affixes respectives : $z_A = 1, z_B = z_1 - i$ et $z_C = z_2 + 1$

a) Vérifier que $z_B = 3 - 3i$ et que $z_C = 4 + 2i$ puis placer les points A ,B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$

b) Déterminer la nature du triangle ABC
c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme,

3) pour tout nombre $z \neq 3 - 3i$; on pose : $f(z) = \frac{z - 4 - 2i}{z - 3 + 3i}$

a)Vérifier que $f(z_D) = -i$ et interpréter graphiquement

b) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$

c)Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur

d) Déterminer et construire Γ_3 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = \sqrt{2}$

e)vérifier que les 3 ensembles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 passe par les points A et D

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + \frac{x}{e^x} = x - 1 + xe^{-x}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(O;\vec{i},\vec{j})$

1) on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1-x+e^{x}$

a)calculer $g'(x)$ où g' est la dérivée de g

b) Etudier les variations de g et en déduire le signe de g (x) sur $\mathbb{R}$

2a) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.Montrer que la droite$(\Delta)$ d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique à (C) et étudier la position relative de (C) et (Δ).

3a) Calculer la dérivée $f'(x)$ puis vérifier que : $f'(x)=\frac{g(x)}{e^{x}}$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

4a) Déterminer le point A de (C)ola tangente T à la courbe (C) est parallèle à l'asymptote oblique (Δ)

Donner une équation de T

b) Tracer T , (Δ) et (C)

5) Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x)=-(x+1)e^{-x}$

a) Vérifier que $H'(x)=f(x)-x+1$.En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

b) Calculer l'aire du domaine plan limité par(C)et (Δ) et les droites $x=1 et x=3$

Exercice4

Partie A On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^{3}-2+4\ln x$

1a)Montrer que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

b) Dresser le tableau de variations de g

2a) Montrer que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α .vérifier que $1,1\prec\alpha\prec1,2$.

c) En déduire le signe de g sur $]0,+\infty[$

Partie B Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x-1-2\frac{\ln x}{x^{2}}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(O;\vec{i},\vec{j})$

1a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^{+}} f(x)=+\infty$ et interpréter graphiquement

b)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)$.En déduire que la courbe(C) admet une asymptote oblique (Δ) don on donnera une équation .

C) Etudier la position relative de (C) et (Δ).

2a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$ on à : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^{3}}$

b) Montrer que $f(\alpha)=\frac{3\alpha^{3}-2\alpha^{2}-2}{2\alpha^{2}}$

c) Dresser le tableau de variation de f

3a) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point A d'abscisse 1.Vérifier que (T) est perpendiculaire à (Δ)

b) Montrer que (C)coupe(Ox) en un point B autre que A d'abscisse β telle que $1,3\prec\beta\prec1,4$

c) Représenter la courbe (C) et les droites (Δ) et (T) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

d) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation :

$$2x^3-(m+1)x^2-2\ln x=0$$

4)Soit S l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=\beta$

a) Justifier que : $S=-\int_1^{\beta} f(x)dx$

b) En utilisant une intégration par parties, calculer $I=\int_1^{\beta}\frac{\ln x}{x^2}dx$ .Calculer S en fonction de β

Fin

Corrigé Exercice 1

Question N°	1	2	3	4	5	6
Réponse	C	A	B	A	B	C

Corrigé Exercice2

1) $p(z)=z^3-7z^2+19z-13$

a) $p(1)=1-7+19-13=20-20=0$.

b) $p(z)=(z-1)(z^2+az+b)=z^3+az^2+bz-z^2-az-b=z^3+(a-1)z^2+(b-a)z-b$

par indentification : $\begin{cases} a-1=-7\Leftrightarrow a=-6 \\ b-a=19\Leftrightarrow b=19+a\Leftrightarrow b=13 \\ -b=-13\Leftrightarrow b=13 \end{cases}$

donc $p(z)=(z-1)(z^2-6z+13)$

c)

$p(z)=0\Leftrightarrow (z-1)(z^2-6z+13)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z-1=0 \\ ou z^2-6z+13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_0=1 \\ ou z^2-6z+13\Rightarrow \Delta=36-52=-16=16i^2=(4i)^2 \\ \Rightarrow z_1=\frac{6-4i}{2}=3-2i, z_2=\frac{6+4i}{2}=3+2i \end{cases}$

$S=\{1,3-2i,3+2i\}$

a) $z_A=1, z_B=z_1-i=3-2i-i=3-3i$; $z_C=z_2+1=3+2i+1=4+2i$

BAC 2017
Session Normale

Baccalauréat 2017 session normale

Exercice 1(3points)

Le tableau ci-contre donne les résultats d'une étude d'efficacité d'un vaccin, sur un groupe de 1000 personnes.

	vacciné	non vaccinée	Total
Malade	100	150	250
non malade	600	150	750
Total	700	300	1000

On choisit au hasard une personne de ce groupe et on note V l'événement "la personne est vaccinée" et M l'événement "la personne est malade »

Pour chacune des six questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

N0	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	La probabilité P (V)est :	0.7	0.6	0.1
2	La probabilité P (M)est :	0.1	0.15	0.25
3	La probabilité P $(V \cap M)$ est :	0.1	0.155	0.85
4	La probabilité $p_M(V)$ est :	0.03	0.3	0.28

Le choix est répété, de façon indépendante, durant 10 jours successifs ; à raison d'une personne du groupe par jour. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes à la fois malades et vaccinées choisies. Soit E l'événement « au moins une personne malade et vaccinée choisie durant ces dix jours »

5	La probabilité P (E)est :	$1-(0.9)^{10}$	$1-(0.1)^{10}$	$1-(0.85)^{10}$
6	L'espérance mathématique de X est :	1	2	3

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée :

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5points)

1°pour tout nombre complexe z on pose : $p(z) = z^3 - 10z^2 + 36z - 40$

a) Calculer $p(2)$

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a : $p(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $p(z) = 0$

2°) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A ,B et C d'affixes respectives : $z_A = 4-2i$, $z_B = 2$ et $z_C = 4+2i$

a) Placer les points A,B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe z_D du point D tel que ABCD est soit un parallélogramme.

3) pour tout nombre complexe $z \neq 4+2i$; on pose : $f(z) = \dfrac{z-4+2i}{z-4-2i}$

a) Vérifier que $f(z_D) = i$ et interpréter graphiquement.

b) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que : $|f(z)| = 1$

c) Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tel que : $|f(z)-1| = \sqrt{2}$

4)On pose $z_0 = f(2i)$. Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = z_0^{\,n}$.

a) Ecrire z_0 sous forme algébrique, puis vérifier que : $z_0 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier n telle que $|z_n| \geq 2017$.

c) Vérifier que le point d'affixe z_{2018} appartient à l'axe des imaginaires purs.

Exercice 3 (5points)

Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = e^{-x} + 2x - 2$ (C) la courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

1a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-2)\right)$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.

2a) Calculer la dérivée $f'(x)$ et vérifier que $f'(-\ln 2)=0$

b) Etudier le signe $f'(x)$. Puis dresser le tableau de variation de f.

3a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β.
Vérifier que $-1,7<\alpha<-1,6$ et $0,7<\beta<0,8$

b) Représenter la courbe (C) de f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4) On définit les suites (u_n) et (v_n) pour tout entier naturel n par : $u_n=e^{-n}$ et $v_n=2n-2$

a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique et qu'elle est décroissante.

b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique et qu'elle est croissante.

c) Ces suites sont-elles adjacentes ? Justifier.

5) Pour tout entier naturel n on pose : $S_n=f(0)+f(1)+f(2)+....+f(n)$

a) Calculer S_n en fonction de n

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2}$

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(2-2x)(\ln x-2)$ et Γ la courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

1°) On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=\frac{1}{x}+1-\ln x$

a)Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

b) calculer la dérivée $g'(x)$ puis Dresser le tableau de variation de g

c) Montrer que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminer a

d) Montrer que l'équation g(x)=0 admet sur $]0,+\infty[$ une unique solution α telle que $3,5\prec\alpha\prec3,6$ .En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ .Interpréter graphiquement

2a) Calculer $f'(x)$ et monter que pour tout $x\succ0, f'(x)=2g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f

3a) Montrer que $f(\alpha)=\frac{2(1-\alpha)^2}{\alpha}$ où α est le réel trouvé dans la question 1°)

b) Donner une équation de la tangente T la courbe Γ au point A d'abscisse $x_0=1$

c) Montrer que Γ coupe (Ox) un en deuxième point B ,autre que A ,d'abscisse x_0 tel que $7.38\prec x_0\prec7.39$

4a) Construire Γ et T dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. (on prendra $\alpha=3,6$ et $f(\alpha)=3,7$)

b) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m ,le nombre de solutions de l'équation $(2-2x)\ln x=m$

5a) L'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_1^2 (2-2x)\ln x dx = -\frac{1}{2}$

b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe Γ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=2$

Corrigé baccalauréat 2017 session normale

Exercice 1

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse	A	C	A	B	A	A

Exercice 2

$p(z) = z^3 - 10z^2 + 36z - 40$

1a) $p(2) = 2^3 - 10\times 2^2 + 36\times 2 - 40 = 8 - 40 + 72 - 40 = 80 - 80 = 0$

b) $p(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$

$= z^3 + az^2 + bz - 2z^2 - 2az - 2b$

$= z^3 + (a-2)z^2 + (b-2a)z - 2b$

Par identification

$$\begin{cases} a-2=-10 \Leftrightarrow a=-8 \\ b-2a=36 \\ -2b=-40 \Leftrightarrow b=20 \end{cases}$$

$p(z) = (z-2)(z^2 - 8z + 20)$

c) $p(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2 - 8z + 20) = 0$

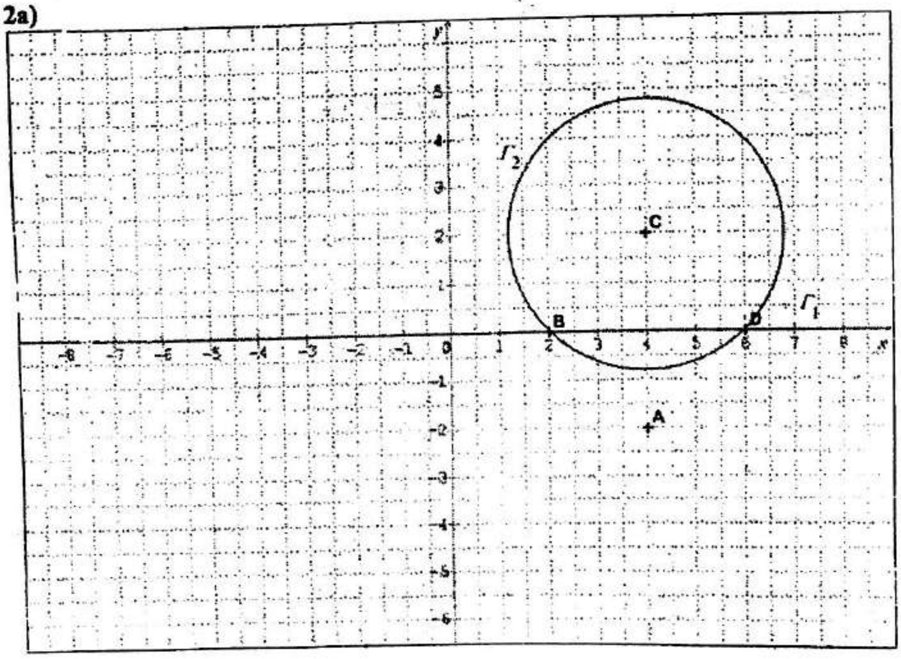
$z - 2 = 0 \Leftrightarrow z = 2$ où $z^2 - 8z + 20 = 0$

$\Delta = 64 - 80 = -16 = 16i^2$

$z = \frac{8-4i}{2} = 4 - 2i, z' = \frac{8+4i}{2} = 4 + 2i$

$S = \{2; 4-2i, 4+2i\}$

2a)



Exercice 1 :

Q	1	2	3	4	5	6
R	A	C	A	C	A	A

Exercice 2 :

1) $p(z) = z^3 - 10z^2 + 36z - 40$

a) $P(2) = 2^3 - 10.(2^2) + 36.(2) - 40$

$= 8 - 40 + 72 - 40 =$

$80 - 80 = 0 \Rightarrow p(2) = 0$

Donc 2 est la racine p(z)

b) $p(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$

D'après le tableau d'ohner suivant :

1	-10	36	-40
	2	2	2
1	-8	20	0

a = -8 et b = 20 ⇒

$P(z) = (z-2)(z^2 - 8z + 20)$

c) $p(z) = 0 \Rightarrow (z-2)(z^2 - 8z + 20) = 0 \Rightarrow$

$z - 2 = 0 \Rightarrow z_0 = 2$ ou

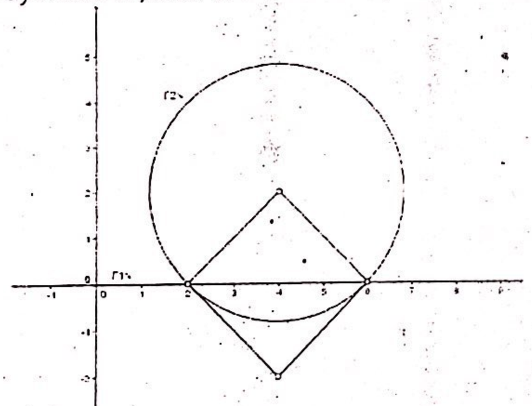
$z^2 - 8z + 20 = 0 \Rightarrow \Delta = 64 - 80 = -16 = (4i)^2$

$z_1 = \frac{8+4i}{2} = 4 - 2i$ et $z_2 = \frac{8-4i}{2} = 4 + 2i$

$P(z) = 0 \Rightarrow s = \{4 - 2i \ ; \ 2 \ ; \ 4 + 2i\}$

2) On a $z_A = 4 - 2i$; $z_B = 2$; $z_C = 4 + 2i$

a) Placer A , B et C.



b) $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} \ \frac{4+2i-2}{4-2i-2} = \frac{2+2i}{2-2i} \times \frac{2+2i}{2+2i} =$

$= \frac{8i}{8} = i$

⇒Le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

c) ABCD est un parallélogramme ⇒

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow Z_C - Z_D = Z_B - Z_A \Rightarrow$

$Z_D = Z_C - Z_B + Z_A = 4 + 2i - 2 + 4 - 2i = 6$

3) $f(z) = \frac{z-4+2i}{z-4-2i} = \frac{z-z_C}{z-z_B}$

a) $f(z_D) = \frac{6-4+2i}{6-4-2i} = \frac{2+2i}{2-2i} =$

$\frac{(2+2i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} = \frac{8i}{8} = i$

Interprétation:

Le triangle ACD est rectangle isocèle en D.

b) $|f(z)| = 1 \Rightarrow \left|\frac{z-4+2i}{z-4-2i}\right| = 1 \Rightarrow$

$\left|\frac{z_M - z_A}{z_M - z_C}\right| = 1 \Rightarrow \frac{AM}{CM} = 1 \Rightarrow CM = AM$

L'ensemble Γ1 des points M d'affixe z est la médiatrice de $[AC]$.

c) $|f(z) - 1| = \sqrt{2} \rightarrow \left|\frac{z-4+2i}{z-4-2i} - 1\right| = \sqrt{2}$

$\left|\frac{z-4+2i-z+4+2i}{z-(4+2i)}\right| = \sqrt{2} \rightarrow \left|\frac{4i}{z_M - z_C}\right| = \sqrt{2} \rightarrow$

$\frac{4}{CM} = \sqrt{2} \rightarrow CM = 2\sqrt{2} \rightarrow \Gamma_2$ est un cercle de centre C et de rayon $2\sqrt{2}$ cm

4) a) $Z_0 = f(2i) = \frac{2i-4+2i}{2i-4-2i} = \frac{-4+4i}{-4} = 1 - i$

$|Z_0| = \sqrt{2}$ et $\arg Z_0 = \frac{-\pi}{4} \Rightarrow Z_0 = \sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}}$

b) $Z_n = Z_0{}^n = (\sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}})^n = (\sqrt{2})^n e^{\frac{-n\pi}{4}} \Rightarrow$

$|Z_n| = (\sqrt{2})^n$

$|Z_n| \geq 2017 \Rightarrow (\sqrt{2})^n \geq 2017 \Rightarrow$

$ln(\sqrt{2})^n \geq ln2017 \Rightarrow nln\sqrt{2} \geq ln2017 \Rightarrow$

$n \geq \frac{\ln(2017)^2}{ln2} \Rightarrow n \geq 21{,}95 \Rightarrow n_0 = 22$

c) $\arg Z_{2018} = \frac{-2018\pi}{4} =$

$-504\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{2}[2\pi]$

$\Rightarrow Z_{2018}$ *est imaginaire pur*

Exercice 3 :

1) $f(x) = e^{-x} + 2x - 2$

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to+\infty} (e^{-x} + 2x - 2)$

$= 0 + \infty = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (2x-2)) =$

$\lim_{x\to+\infty} (e^{-x}) = 0$

Interprétation:

D : y = 2x - 2 est A. Ob de (C) en $+\infty$

Avec Cf / D

b)) $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to-\infty} (e^{-x} + 2x - 2) =$

$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}(1 + 2xe^{x} - 2e^{x}) =$

$+\infty \times (1) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} (\frac{e^{-x}}{x} + 2 - \frac{2}{x}) =$

$\lim_{x\to-\infty} (\frac{1}{xe^{x}} + 2 - \frac{2}{x}) = \frac{1}{0^-} + 2 - \frac{2}{-\infty} =$

$-\infty + 2 - 0 = -\infty$

Interprétation:

Cf admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $-\infty$

2) a) $f'(x)= 2 - e^{-x}$

$f'(-\ln 2) = 2 - e^{\ln 2}= 2 - 2=0$

si $x\leq -\ln 2 \Rightarrow -x \geq \ln 2 \Rightarrow e^{-x} \geq 2$

$\Rightarrow -e^{-x} \leq -2 \Rightarrow 2 - e^{-x} \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0$

Le TV de f

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$-2\ln 2$	↗	$+\infty$

D'après le TV, f(x) est strictement décroissante et continue de $]-\infty; -\ln 2]$ *et change le signe ; d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation ; f(x)= 0 admet une solution α.*

$f(-1{,}7) = \approx 0{,}07 > 0$

$f(-1{,}6) = \approx -0{,}24 < 0$

$f(-1{,}7) \times f(-1{,}6) < 0$ *alors*

$\Rightarrow -1{,}7 < \alpha < -1{,}6$

De même

f(x) est strictement croissante et continue de $[-\ln 2; +\infty[$ *et change le signe ; d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation ; f(x)= 0 admet une solution β.*

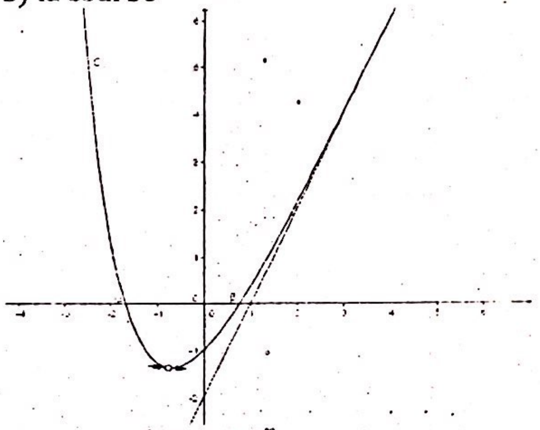
$f(0{,}7) = \approx -0{,}103 < 0$

$f(0{,}8) = \approx 0{,}049 > 0$

$f(0{,}7) \times f(0{,}8) < 0$ *alors*

$\Rightarrow 0{,}7 < \alpha < 0{,}8$

b) la courbe



4) On Pose $\begin{cases} u_n = e^{-n} \\ V_n = 2n-2 \end{cases}$

a) $U_{n+1} = e^{-(n+1)} = e^{-n-1} = e^{-n}.e^{-1} \Rightarrow$

$U_{n+1} = U_n.e^{-1} \Rightarrow$

U_n *est une suite géométrique de* Raison $q = e^{-1}$

$U_0 = 1, |q| < 1 \Rightarrow U_n$ *est décroissante.*

b) $V_{n+1} = 2(n+1) - 2 = 2n = V_n + 2 \Rightarrow$

V_n *est une suite Arithmétique de raison* $r = 2$ *et* $V_0 = -2 \Rightarrow V_n$ *est croissante.*

$\lim_{x\to+\infty} U_n = 0 \Rightarrow U_n$ *est convergente.*

$\lim_{x\to+\infty} V_n = +\infty \Rightarrow V_n$ *est Divegente.*

c) Donc U_n et V_n *ne sont Pas adjacentes.*

c) $S_n = f(0) + f(1) + \cdots + f(n) =$

$U_0+V_0+U_1+V_1......+u_n+V_n = U_0 + U_1....+U_n + V_0+ V_1+...+V_n$

$\Rightarrow S_n = \frac{(1-(e^{-1})^{n+1})}{1-e^{-1}} + \frac{(n+1)(2n-2-2)}{2} \Rightarrow$

$S_n = \frac{e-e^{-n-2}}{e-1} + n^2 - n - 2 \Rightarrow$

$\lim_{x\to+\infty} S_n = \frac{e}{e-1} + \infty = +\infty$ .et

$\lim_{x\to+\infty} \frac{S_n}{n^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{e-e^{-n-2}}{e-1}}{n^2} + \frac{n^2-n-2}{n^2}\right) = 1.$

Exercice 4 :

1) $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) = \frac{1}{x} + 1 - \ln x$

a) $\lim_{x\to 0^+} g(x) =$

$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + 1 - \ln x\right) = +\infty + \infty = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) =$

$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} + 1 - \ln x\right) =$

$0 - \infty = -\infty$

b) $g'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-(x+1)}{x^2} < 0$

Donc g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

Le TV

x	$-\infty$		α		$+\infty$
g'(x)			-		
g(x)	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

c) D'après le TV, g(x) est strictement croissante et continue donc g(x) est bijective de $I = [0; +\infty[$ *sur* $J = R$

d)g(x) est bijective de $I = [0; +\infty[$ et change le signe ; $0 \in J$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation ; g(x)= 0 admet une solution α.

$g(3{,}5) = \approx 0{,}77 > 0$

$g(3{,}6) = \approx -3{,}36 < 0$

$\Rightarrow f(3{,}5) \times f(3{,}6) <$ à

$\Rightarrow 3{,}5 < \alpha < 3{,}6$

Signe de g :

x	0		α		$+\infty$
g(x)	||	+	0	-	

2)f(x) = (2-2x)(lnx-2)

a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) =$

$\lim_{x\to 0^+}((2-2x)(lnx-2)) =$

$2(-\infty) = -\infty$

Donc d : x =0 est AV de Cf

b) $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to +\infty}((2-2x)(lnx-2)) =$

$-\infty \times +\infty = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) =$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{2}{x}-2\right)(lnx-2)\right) =$$

$-2(+\infty) = -\infty$

Cf admet une branche parabolique de direction (oy)en $+\infty$

b)f'(x) =-2lnx+4+$\frac{(2-2x)}{x}$

=-2lnx+4+$\frac{2}{x}-2$=-2lnx+2+$\frac{2}{x}$

=2($\frac{1}{x}+1-lnx$) = $2g(x)$

Donc f' et g ont le même signe

c)Le TV de f

x	0		α		$+\infty$
f'(x)	||	+		-	
f(x)	|| $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

3)a) $g(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha}+1-ln\alpha = 0$

$\Rightarrow \ln\alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha}$

$f(\alpha) = (2-2\alpha)(ln\alpha-2)$

$\Rightarrow f(\alpha) = (2-2\alpha)(\frac{\alpha+1}{\alpha}-2)$

$= 2(1-\alpha)(\frac{1-\alpha}{\alpha}) = \frac{2(1-\alpha)^2}{\alpha}$

b)La tangente en A

$f'(1) = 4$

$f(1) = 0$

$\Rightarrow T : y = 4(x-1)+0 \Rightarrow T : y = 4x+4$

c)intersection de Cf avec (ox)

f(x) =0

D'après le TV, f(x) ; change le signe deux fois de $I =]0; +\infty[$ donc f(x)= 0 admet deux solutions: $x = 1$ et $x = \beta$

f(7,38)= 0,01 ; f(7,38)=-0,001

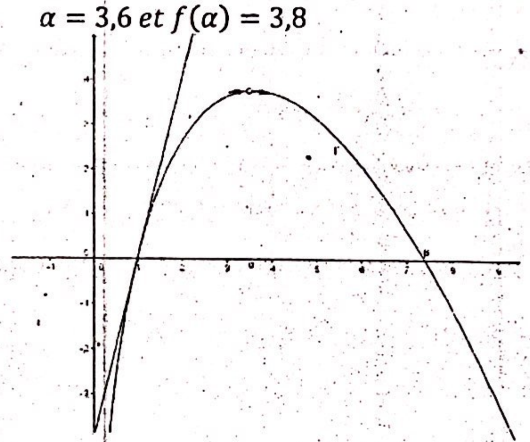
f(7,3_)× $f(7{,}39) < 0$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation ;

7,38< $\beta < 7{,}39$

4) a)Représentation graphique

$\alpha = 3{,}6$ *et* $f(\alpha) = 3{,}8$



b) $(2-2x)lnx = m$

$\Rightarrow (2-2x)lnx - 2(2-2x) =$

$m - 2(2-2x) = 4x - 4+m$

$\Rightarrow f(x) = 4x - 4 + m$

Le nombre de solution de cette équation est le nombre de point d'intersection de (C) avec les parallèles à T .

(la tangente en A)

on peut résumer les résultats dans un tableau suivant :

Les valeurs de m	*Nombre de Solutions*
$m < 0$	*2Solution*
$m = 0$	*1 Solution(T)*
$m > 0$	*0Solutions*

5) a) Soit $I = \int_1^2 (2-2x)\ln x dx$

on pose $u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$

et $V' = 2 - 2x \Rightarrow v = 2x - x^2$

$\Rightarrow I = [(2x - x^2)\ln x]_1^2 - \int_1^2 (2-x)dx \Rightarrow$

$I = [(2x - x^2)\ln x]_1^2 - \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 \Rightarrow$

$I = -2 + 2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

b) $\Rightarrow s = \int_1^2 (f(x))dx =$

$\int_1^2 ((2-2x)\ln x - 2(2-2x))dx =$

$\int_1^2 (2-2x)\ln x dx -$

$\int_1^2 (2-2x)\ln x dx = I - [4x - 2x^2]_1^2$

$= -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$

BAC 2017
Session Compl.

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2017
Session Complémentaire

Série : Sciences de la Nature
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficient: 6

Exercice 1 (3 points)

On définit les suites numériques (u_n), (v_n) et (w_n) pour tout $n \geq 1$ par $u_n = 2^n - 2n$, $v_n = 1 + \frac{u_n}{2n}$ et $w_n = \ln(nv_n)$. Soit $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ la somme des n premiers termes de la suite (u_n).

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	Le terme général de (v_n) est	$v_n = 1$	$v_n = 2^n$	$v_n = \frac{2^{n-1}}{n}$	(0,5pt)
2	La suite (u_n) est	croissante	décroissante	constante	(0,5pt)
3	La valeur de S_n est	$S_n = 2^{n+1} - n^2 - n - 2$	$S_n = 2^n - n^2 - n - 2$	$S_n = 2^{n+1} - n^2 - n + 2$	(0,5pt)
4	La suite (v_n) est	convergente	divergente	constante	(0,5pt)
5	La suite (w_n) est	arithmétique	géométrique	convergente	(0,5pt)
6	Si $e^{\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + ... + \ln n} = 120$ alors la valeur de n est	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	(0,5pt)

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée :

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

1) Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - 4\sqrt{2}z^2 + 12z - 8\sqrt{2}$

a) Calculer $P(2\sqrt{2})$. (0,5pt)

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a: $P(z) = (z - 2\sqrt{2})(z^2 + az + b)$ (0,5pt)

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$ (0,5pt)

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $z_B = 2\sqrt{2}$ et $z_C = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ (0,5pt)

b) Déterminer la nature du triangle ABC et celle du quadrilatère OABC (0,5pt)

3) Pour tout nombre $z \neq \sqrt{2} - i\sqrt{2}$; on pose : $f(z) = \frac{z - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{z - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}$.

a) Vérifier que $f(z_B) = -i$ et interpréter graphiquement. (0,5pt)

b) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$. (0,5pt)

c) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M d'affixe z tel que f(z) soit imaginaire pur. (0,5pt)

d) Déterminer et construire Γ_3 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = 2$. (0,5pt)

e) Vérifier que les trois ensembles Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 passent par les points O et B. (0,5pt)

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)(1+e^{-x})$ et soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Montrer que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement. (0;5pt)

91

b) Montrer que $f(x)=x+2+\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}$, puis calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+2)\right)$. (0,5pt)

c) En déduire que Γ admet une asymptote oblique D dont on donnera une équation. (0,25pt)

d) Etudier la position relative entre Γ et D. (0,25pt)

2° a) Montrer que $f'(x)=1-(x+1)e^{-x}$ où f' est la dérivée première de f (0,5pt)

b) Etudier les variations de f' et en déduire le signe de $f'(x)$. (0,5pt)

c) Dresser le tableau de variation de f. (0,25pt)

3° a) Déterminer le point A de Γ où la tangente T à la courbe Γ est parallèle à l'asymptote D. Donner une équation de T. (0,5pt)

b) Déterminer les points d'intersection de Γ avec les axes de coordonnées (0,25pt)

c) Tracer D, T et Γ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. (0,5pt)

4° a) calculer l'intégrale $I=\int_{-2}^{0} 2e^{-x}dx$ (0,25pt)

b) A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale $J=\int_{-2}^{0} xe^{-x}dx$. (0,25pt)

c) En déduire l'aire du domaine délimité par l'asymptote D, la courbe Γ et les droites d'équations $x=-2$ et $x=0$ (0,25pt)

5° Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $x+2=(m-2)e^x$ (0,25pt)

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $D_f=]0,1[\cup]1,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{2x-1+\ln x}{x-1}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° On considère la fonction u définie sur $]0,+\infty[$ par : $u(x)=1+x\ln x$.

a) Calculer $\lim_{x\to0^+} u(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} u(x)$ (0,5pt)

b) Calculer $u'(x)$ où u' est la dérivée de u, puis dresser le tableau de variation de u (0,75pt)

c) Montrer que $\forall x>0$ on a $u(x)\geq 1-\frac{1}{e}$. En déduire le signe de $u(x)$ (0,5pt)

2° a) Montrer que $\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ et interpréter graphiquement (0,5pt)

b) Calculer et interpréter les limites $\lim_{x\to1^-} f(x)$ et $\lim_{x\to1^+} f(x)$ (0,5pt)

3° a) Monter que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x)=2+\frac{1}{x-1}+\frac{\ln x}{x-1}$ (0,5pt)

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et en déduire que la courbe (C) admet une asymptote horizontale (Δ) dont on donnera une équation. (0,5pt)

c) Etudier la position relative de (C) et (Δ). (0,5pt)

4° a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout x de D_f on a : $f'(x)=\frac{-u(x)}{x(x-1)^2}$. (0,5pt)

b) Dresser le tableau de variation de f. (0,5pt)

5° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]0,1[$

a) Montrer que g est une bijection de $]0,1[$ sur un intervalle I que l'on précisera. (0,5pt)

b) Dresser le tableau de variation de g^{-1}, où g^{-1} est la réciproque de g. (0,5pt)

6° a) Montrer que la courbe (C) coupe (Ox) en un unique point A d'abscisse α avec $0.6<\alpha<0.8$ (0,25pt)

b) Tracer (Δ); (C) et (C') dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. où (C') est la courbe de g^{-1} (0,5pt)

Fin.

92

Exercice 1 :

Q	1	2	3	4	5	6
R	C	A	A	B	B	C

Exercice 2 :

1) $p(z) = z^3 - 4\sqrt{2}z^2 + 12z - 8\sqrt{2}$

a) $P(2\sqrt{2}) = (2\sqrt{2})^3 - 4\sqrt{2}.(2\sqrt{2})^2 + 12.(2\sqrt{2}) - 8\sqrt{2}$

$= 16\sqrt{2} - 32\sqrt{2} + 24\sqrt{2} - 8\sqrt{2} =$

$-40\sqrt{2} + 40\sqrt{2} = 0 \Rightarrow p(2\sqrt{2}) = 0$

Donc $2\sqrt{2}$ est la racine p(z)

b) $p(z) = (z - 2\sqrt{2})(z^2 + az + b)$

D'après le tableau d'ohner suivant :

1	$-4\sqrt{2}$	12	$-8\sqrt{2}$
	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$
1	$-2\sqrt{2}$	4	0

$a = -2\sqrt{2}$ et $b = 4 \Rightarrow$

$P(z) = (z - 2\sqrt{2})(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4)$

c) $p(z) = 0 \Rightarrow (z - 2\sqrt{2})(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4) = 0$
$\Rightarrow$

$z - 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow z_0 = 2\sqrt{2}$ ou

$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 8 - 16 = -8$

$\Rightarrow \Delta = (2i\sqrt{2})^2$

$z_1 = \frac{2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ *et*

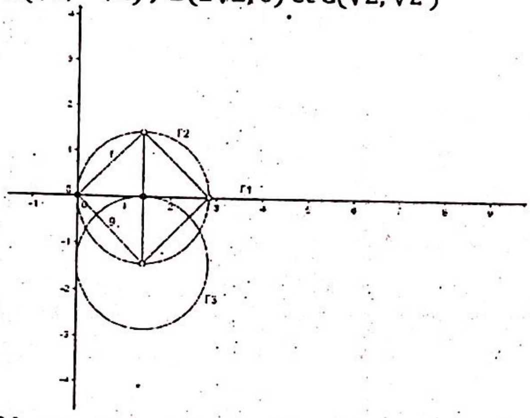
$z_2 = \frac{2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$P(z) = 0 \Rightarrow$

$s = \{\sqrt{2} - i\sqrt{2}\ ;\ 2\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2} + i\sqrt{2}\}$

2) a) On a $Z_A = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$;
$Z_B = 2\sqrt{2}$ et $Z_C = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$A(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; $B(2\sqrt{2}; 0)$ et $C(\sqrt{2}; \sqrt{2})$



b) $AB = |Z_B - Z_A| = |2\sqrt{2} - \sqrt{2} + i\sqrt{2}| = |\sqrt{2} + i\sqrt{2}| = 2$

$AC = |Z_C - Z_A| = |\sqrt{2} + i\sqrt{2} - \sqrt{2} + i\sqrt{2}| = |2i\sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$

$CB = |Z_B - Z_C| = |2\sqrt{2} - \sqrt{2} - i\sqrt{2}| = |\sqrt{2} - i\sqrt{2}| = 2$

$AC^2 = 8$; $AB^2 + BC^2 = 8$

$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$

D'après le théorème de Pythagore

Le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

$\overrightarrow{AB} = z_B - z_A = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} + i\sqrt{2} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$\overrightarrow{OC} = z_C - z_O = \sqrt{2}\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} \Rightarrow$

OABC est un parallélogramme.

$OA = |Z_A - Z_O| = |-\sqrt{2} + i\sqrt{2}| = 2$

$OC = |Z_C - Z_O| = |\sqrt{2} + i\sqrt{2}| = 2$

$\Rightarrow OC = OA = AB = BC$

OABC est un parallélogramme qui a un angle droit et quatre cotés égaux,

Donc OABC est un carré.

3) $f(z) = \frac{z - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{z - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}$

a) $f(z_B) = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - \sqrt{2} + i\sqrt{2}} =$

$\frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}} = \frac{-4i}{4} = -i$

Interprétation:

Le triangle ABC rectangle isocèle en B.

b) $|f(z)| = 1 \Rightarrow \left|\frac{z - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{z - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}\right| = 1 \Rightarrow$

$\left|\frac{z_M - z_C}{z_M - z_A}\right| = 1 \Rightarrow \frac{CM}{AM} = 1 \Rightarrow AM = CM$

L'ensemble Γ1 des points M d'affixe z est la médiatrice de $[AC]$.

c) f(z) est imaginaire pur $\Leftrightarrow$

$\arg f(z) = \frac{\pi}{2}[\pi] \Rightarrow \arg\frac{z - z_C}{z - z_A} = \frac{\pi}{2}[\pi] \Rightarrow$

$(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{CM}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \Rightarrow$ L'ensemble Γ2 des points M d'affixe z est le cercle de diamètre $[AB]$. privé de A etC

d) $|f(z) - 1| = 2 \rightarrow \left|\frac{z - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{z - \sqrt{2} + i\sqrt{2}} - 1\right| = 2$

$\left|\frac{z - \sqrt{2} - i\sqrt{2} - z + \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{z - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}\right| = 2 \rightarrow \left|\frac{-2\sqrt{2}}{z_M - z_A}\right| = 2 \rightarrow$

$\frac{2\sqrt{2}}{AM} = 2 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{AM} = 1 \rightarrow AM = \sqrt{2} \rightarrow \Gamma_3$ est un cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$ cm

e) $|f(z_B)| = |-i| = 1 \Rightarrow B \in \Gamma1$

$f(z_B) = -i \Rightarrow B \in \Gamma2$

$|f(z_B) - 1| = |-i - 1| = \sqrt{2} \Rightarrow B \ni \Gamma3$

$|f(z_O)| = |-i| = 1 \Rightarrow O \in \Gamma1$

$f(z_O) = -i \Rightarrow B \in \Gamma2$

$|f(z_O) - 1| = |-i - 1| = \sqrt{2} \Rightarrow O \ni \Gamma3$

Exercice 3 :

1) $f(x) = (x+2)(1+e^{-x})$

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+2)(1+e^{-x})$

$= -\infty \times +\infty = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (1+\frac{2}{x})(1+e^{-x}) =$
$1 \times -\infty = -\infty$

Interprétation:

-Cf admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $-\infty$

b) $f(x) = x + xe^{-x} + 2 + 2e^{-x} =$
$x + 2 + \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+2+\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x})$

$+\infty + 0 + 0 = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (x+2)) =$

$\lim_{x\to+\infty} ((\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}) = 0 + 0 = 0$

Interprétation:

D : $y = x + 2$ est A. Ob de (C) en $+\infty$

$f(x) - y = \frac{x+2}{e^x}$, $f(x) - y = 0 \Rightarrow x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = -2 \Rightarrow$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f(x)-y	-		+
P R	D /C		C /D

2) a) $f'(x) = 1 + e^{-x} - (x+2)e^{-x}$

$= 1 + (1 - x - 2)e^{-x}$

$\Rightarrow f' = 1 - (x+1)e^{-x}$

$f''(x) = -e^{-x} - (-x-1)e^{-x} = xe^{-x}$

b) on pose $f'' = 0 \Rightarrow x = 0$; $f'(0) = 0$,

Le TV de f'

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''(x)	-		+
f'(x)	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow 1$

Signe de f' :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	+	0	+

c) Le TV de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	+	0	+
f(x)	$-\infty \nearrow$	4	$\nearrow +\infty$

4) a) T // D $\Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow 1 - (x+1)e^{x} = 1$

$\Rightarrow (x+1)e^{x} = 0 \Rightarrow x = -1$; $f(-1) = 1 + e$

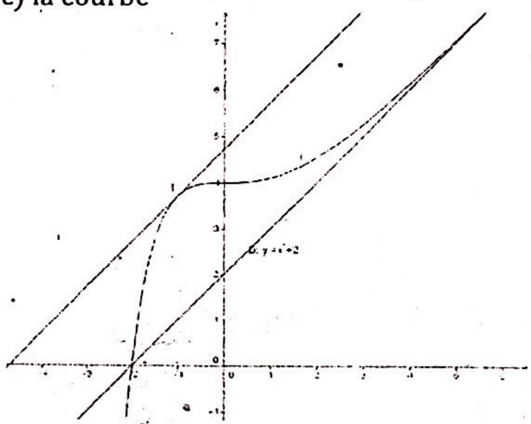
$\Rightarrow$ T : $y = 1(x+1) + 1 + e$

$\Rightarrow$ T : $y = x + 2 + e$

b) points d'intersection de (C) avec les axes

$\begin{cases} f(x) = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow A(2;0) \\ f(0) = 4 \Rightarrow B(0;-4) \end{cases}$

c) la courbe



4) a) $I = \int_{-2}^{0}(2e^{-x})dx = [-2e^{-x}]_{-2}^{0} =$
$-2 + 2e^2$

$\Rightarrow \boxed{I = -2 + 2e^2}$

b) $J = \int_{-2}^{0} xe^{-x}dx$

on pose $u = x \Rightarrow u' = 1$

et $V' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$

$\Rightarrow J = [-xe^{-x}]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} -e^{-x}dx$

$\Rightarrow J = [-xe^{-x} - e^{-x}]_{-2}^{0} = -1 - 2e^2 + e^2$

$\Rightarrow \boxed{J = -1 - e^2}$

c) $D = \int_{-2}^{0}(y - f(x))dx = I + J$

$= -2 + 2e^2 - 1 - e^2$

$\Rightarrow \boxed{D = e^2 - 3}$

d) L'équation : $x + 2 = (m-2)e^{x}$

$\Rightarrow (x+2)e^{-x} = m - 2$

$\Rightarrow (x+2)e^{-x} + x + 2 = x + m$

$\Rightarrow (x+2)(1+e^{-x}) = x + m$

$\Rightarrow f(x) = x + m$

$\Rightarrow y = x + m // D // T$

Le nombre de solution de cette équation est le nombre de point d'intersection de (C) avec les parallèles à D (A. Ob)

on peut résumer les résultats dans un tableau suivant :

Les valeurs de m	*Nombre de Solutions*
$m \leq 2$	*1Solution*
$2 < m < 2+e$	*2 Solutions*
$m = 2+e$	*1 Solution (T)*
$m > 2+e$	*10Solution (T)*

Exercice 4 :

$\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$;

$$f(x) = \frac{2x-1+\ln x}{x-1}$$

1) $u(x) = 1+x\ln x$

a) $\lim_{x\to 0^+} u(x) =$

$\lim_{x\to 0^+}(1+x\ln x) = 1+0 = 1$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) =$

$\lim_{x\to+\infty}(1+x\ln x) = 1+\infty = +\infty$

b) $u'(x) = \ln x + 1$

$u'(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1$

$\Rightarrow x = e^{-1}$

$u(e^{-1}) = 1 - e^{-1}$

Le TV

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$u'(x)$		-		+	
$u(x)$	1	↘	$1-e^{-1}$	↗	$+\infty$

c) D'après le TV, $u(x) \geq 1-e^{-1} \Rightarrow$

$u(x) \geq 1-\frac{1}{e} \Rightarrow u(x) > 0$

2) $f(x) = \frac{2x-1+\ln x}{x-1}$

a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) =$

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2x-1+\ln x}{x-1}\right) = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$

Donc d : x =0 est AV de Cf

b) $\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{2x-1+\ln x}{x-1}\right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x-1+\ln x}{x-1}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Donc d : x =1 est AV de Cf

3) a) $f(x) = \frac{2x-1+\ln x}{x-1} = \frac{2x-1-1+1+\ln x}{x-1} =$

$= \frac{2x-2+1+\ln x}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} + \frac{\ln x}{x-1}$

$= 2 + \frac{1}{x-1} + \frac{\ln x}{x-1}$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x-1}+\frac{\ln x}{x-1}\right) =$

$2+0+0 = 2$

Cf admet une asymptote horizontale (d)d'équation : y = 2

c)La position de Cf avec (d)

$f(x) - y = \frac{1}{x-1} + \frac{\ln x}{x-1} = \frac{1+\ln x}{x-1}$

$f(x) - y = 0 \Rightarrow 1+\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1$

$\Rightarrow x = e^{-1}$

$f(e^{-1}) = 2$

x	0	e^{-1}	1	$+\infty$
f(x)-y	-		+	+
P R	(d)/Cf	2	Cf/(d)	Cf/ (d)

4)a) $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{\frac{x-1}{x}-\ln x}{(x-1)^2} =$

$$\frac{(-x+x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}$$

$$= \frac{-(1+x\ln x)}{x(x-1)^2} = \frac{-u(x)}{x(x-1)^2}$$

b)Le TV de f

x	0		α		1		$+\infty$
f'(x)		-		-		-	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↘ $-\infty$	$+\infty$	↘	2

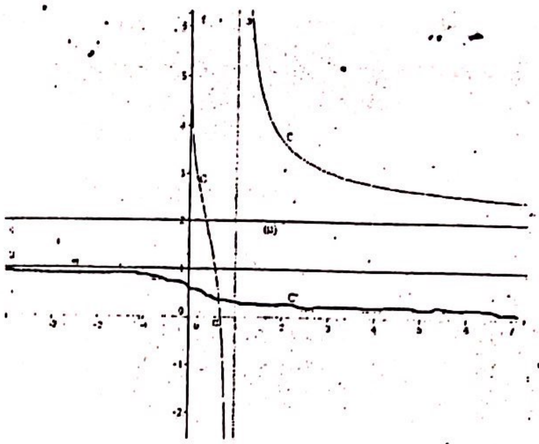
5)a)g est la restriction de f sur $]0;1[$

g est continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $]0;1[$ *sur* $I =]-\infty;+\infty[$

b)Le TV de g^{-1}

x	$-\infty$		$+\infty$
$(g^{-1})'(x)$		-	
$g^{-1}(x)$	1	↘	0

6) a) f(x) =0
D'après le TV, f(x) ; change le signe une seule fois de $I =]0;1[$ *donc l'équation f(x)= 0 admet une unique solution* α
Donc Cf coupe(ox)en unique point A d'abscisse α
$f(0{,}6) > 0, f(0{,}8) < 0$
$\Rightarrow f(0{,}8) < f(\alpha) < f(0{,}6)$
Comme f(x) est décroissante sur $]0;1[$
Alors $0{,}6 < \alpha < 0{,}8$.
b) La courbe



BAC 2018
Session Normale

40

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
SERVICE DES EXAMENS

Baccalauréat 2018
Session Normale

Honneur – Fraternité – Justice

Série : Sciences de la Nature
Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures
Coefficient : 6

Exercice 1 (3 points)

Un groupe de 100 candidats ont passé un test d'inscription dans un centre de formation professionnelle.
Le test est composé de deux épreuves obligatoires : une écrite et une orale.
Les résultats ont montré que : 60 candidats ont réussi l'épreuve écrite dont 45 ont réussi aussi l'épreuve orale.
Parmi ceux qui ont échoué dans l'épreuve écrite 25 % ont réussi l'épreuve orale.
On choisit au hasard un candidat de ce groupe et on considère les évènements suivants :
A : « le candidat a réussi l'épreuve écrite» ; B : « le candidat a réussi l'épreuve orale».
Pour chacune des questions de cet exercice, une seule des trois réponses proposées est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La probabilité $p(A)$ est	0.6	0.45	0.25	(0.5 pt)
2	La probabilité $p(A \cap B)$ est	0.6	0.45	0.25	(0.5 pt)
3	La probabilité $p_A(B)$ est	0.75	0.45	0.25	(0.5 pt)
4	La probabilité $p_{\bar{A}}(B)$ est	0.75	0.45	0.25	(0.5 pt)
5	la probabilité $p(B)$ est	0.75	0.55	0.1	(0.5 pt)

La durée de l'épreuve écrite varie de 20 à 60 minutes. On suppose que le temps X, exprimé en minutes, mis par un candidat avant de remettre sa copie, lors de cette épreuve, est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme.

6	La fonction de densité de X est	$f(x)=\frac{1}{20}$	$f(x)=\frac{1}{40}$	$f(x)=\frac{1}{60}$	(0.25 pt)
7	La probabilité que ce candidat remet sa copie après 30 minutes est	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	(0.25 pt)

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse.
Aucune justification n'est demandée :

Question n°	1	2	3	4	5	6	7
Réponse							

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(3+2i)z^2+(3+3i)z-4i$.

1.a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-8+6i$ — 0,5pt

b) Calculer $P(i)$ — 0,5pt

c) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=(z-i)(z^2+az+b)$. — 0.5pt

d) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$. — 0,5pt

2) Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=i$, $z_B=1-i$ et $z_C=2+2i$.

a) Placer les points A, B et C. — 0,5pt

b) Déterminer la nature du triangle ABC. — 0,25pt

c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme. — 0.25pt

d) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan d'affixe z tel que $\left|\frac{z-2-2i}{z-1+i}\right|=1$. — 0,5pt

3° Pour tout entier naturel n , on pose $z_n=(z_C)^n$ et $v_n=|z_n|$.

a) Vérifier que $z_C=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ puis en déduire l'écriture trigonométrique de z_n. — 0,5pt

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme. — 0,5pt

c) Calculer la limite de (v_n) et exprimer en fonction de n la somme $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ — 0.5pt

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x-1+2xe^{-x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	0,5pt
b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement.	0,5pt
c) Montrer que la droite D d'équation $y=2x-1$ est une asymptote oblique à (C) et étudier la position relative entre (C) et D.	0,5pt
2° a) Calculer la dérivée f' puis montrer que l'expression de la dérivée seconde de f est $f''(x)=(2x-4)e^{-x}$	0,5pt
b) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion A dont on donnera les coordonnées.	0,25pt
c) Etudier les variations de f' et en déduire que f' est positive.	0,5pt
d) Dresser le tableau de variation de f.	0,5pt
3° a) Montrer que la courbe (C) coupe (Ox) en un unique point d'abscisse α avec $0.2<\alpha<0.3$	0,5pt
b) Déterminer le point B de (C) où la tangente T est parallèle à l'asymptote D. Donner une équation de T.	0,5pt
c) Tracer D, T et (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.	0,5pt
d) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation : $-m-1+2xe^{-x}=0$	0,25pt

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2+x+x\ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ et interpréter graphiquement.	(0,75pt)
b) Vérifier que $f(x)=\dfrac{2}{x}+1+\ln x$	(0,5pt)
c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement	(0,5pt)
2° a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.	(1pt)
b) Donner une équation de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse $x_0=1$	(0,5pt)
3° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]0;2]$	
a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.	(0,5pt)
b) Dresser le tableau de variation de g^{-1}, où g^{-1} est la fonction réciproque de g.	(0,5pt)
c) Calculer $(g^{-1})'(3)$ (on pourra utiliser 2° b))	(0,25pt)
d) Construire (C), (C′) et T dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, où (C′) est la courbe de g^{-1}.	(0,5pt)
4°) On considère la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=f(x)-x$	
a) Dresser le tableau de variation de h.	(0,5pt)
b) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α, telle que $2<\alpha<3$. Vérifier que $f(\alpha)=\alpha$ et en déduire que $\forall x\geq\alpha$ on a $f(x)-x\leq0$	(0.5pt)
5°) Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases}u_0=3\\ u_{n+1}=f(u_n),\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$	
a) Montrer par récurrence que $u_n\geq\alpha,\ \forall n\in\mathbb{N}$.	(0,25pt)
b) Montrer que (u_n) est décroissante (on pourra utiliser 4° b). En déduire que (u_n) est convergente.	(0,25pt)
6° a) Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale $K=\int_1^e \ln x\,dx$.	(0,25pt)
b) En déduire l'aire du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$	(0.25pt)

Fin

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation

Baccalauréat 2018
Session Normale

Epreuve de Mathématiques
Série Sciences de la nature

PROPPOSTION DU CORRIGE

Exercice 1

Question n°	1	2	3	4	5	6	7
Réponse	A	B	A	C	B	B	C

Exercice 2

1. $P(z)=z^3-(3+2i)z^2+(3+3i)z-4i$

a) Déterminons les racines carrées du nombre complexe $-8+6i$:

Un nombre complexe $z=x+iy$ est une racine carrée de $-8+6i$ ssi $z^2=-8+6i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=|-8+6i| \\ x^2-y^2=\mathrm{Re}(z) \\ 2xy=\mathrm{Im}(z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10 & (1) \\ x^2-y^2=-8 & (2) \\ 2xy=6 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(2)\Rightarrow 2x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm 1$

$(1)-(2)\Rightarrow 2y^2=18 \Leftrightarrow y=\pm 3$

Or d'après (3) : $xy=3>0$ donc x et y ont le même signe. Alors les racines carrées de $-8+6i$ sont :

$1+3i$ et $-1-3i$

b) Calcul de $P(i)$:

$P(z)=z^3-(3+2i)z^2+(3+3i)z-4i$

$p(i)=i^3-(3+2i)i^2+(3+3i)i-4i$

$=-i+3+2i+3i-3-4i=0$

Déterminons les nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=(z-i)(z^2+az+b)$

On peut utiliser le tableau d'Horner :

i	1	$-3-2i$	$3+3i$	$-4i$
		i	$1-3i$	$4i$
	1	$-3-i$	4	0

Donc $a=-3-i$; $b=4$

Donc $\boxed{P(z)=(z-i)(z^2-(3+i)z+4)}$

La division euclidienne peut être également utilisée :

$$\begin{array}{l|l} P(z)=z^3-(3+2i)z^2+(3+3i)z-4i & z-i \\ \hline -z^3+iz^2 & z^2-(3+i)z+4 \\ =\boxed{-(3+i)z^2+(3+3i)z-4i} & \\ (3+i)z^2+(1-3i)z & \\ =\boxed{4z-4i} & \\ -4z+4i & \\ \boxed{0} & \end{array}$$

On peut aussi utiliser l'identification :

$P(z)=(z-i)(z^2+az+b)$

$=z^3+(a-i)z^2+(b-ai)z-bi$

Par identification $\begin{cases} a-i=-3-2i \\ b-ai=3+3i \\ -bi=-4i \end{cases}$

Donc $a=-3-i$; $b=4$

d) L'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$:

$P(z)=0 \Leftrightarrow (z-i)(z^2-(3+i)z+4)=0$

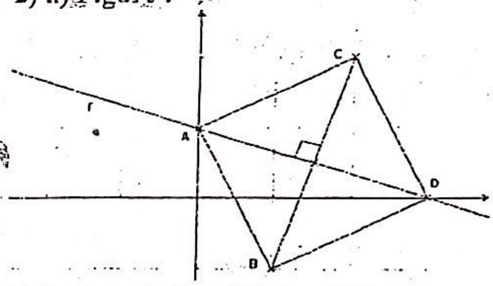
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z-i=0 \Leftrightarrow z=i \\ z^2-(3+i)z+4=0 \end{cases} \text{ou}$$

$\Delta=(-(3+i))^2-4\times1\times4=-8+6i$.

D'après la question n°1, le nombre $\delta_1=1+3i$ est une racine carrée de Δ, d'où les solutions de l'équation $P(z)=0$ sont $z'=\dfrac{3+i+1+3i}{2}=2+2i$ et

$z''=\dfrac{3+i-1-3i}{2}=1-i$. Donc l'ensemble de solutions de l'équation $P(z)=0$ est $\{i;1-i;2+2i\}$

2) a) Figure :



b) La nature du triangle ABC

$$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{1-i-i}{2+2i-i}=\frac{1-2i}{2+i}=\frac{-i(i+2)}{2+i}=-i$$

Donc le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

Autre méthode

$AB=|z_B-z_A|=|1-i-i|=|1-2i|=\sqrt{5}$

$AC=|z_C-z_A|=|2+2i-i|=|2+i|=\sqrt{5}$

$CB=|z_B-z_C|=|1-i-2-2i|=|-1-3i|=\sqrt{10}$

Alors $AB=AC$ et $AB^2+AC^2=CB^2$ Donc le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

c) ABDC est un parallélogramme si et seulement si : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{CD}} \Leftrightarrow z_B-z_A=z_D-z_C$

$\Leftrightarrow z_D=z_B+z_C-z_A=1-i+2+2i-i=3$

Donc $\boxed{z_D=3}$ et D(3 ;0)

Autrement :

ABDC est un parallélogramme si et seulement si les diagonales $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu ; c-à-d :

$\dfrac{z_A+z_D}{2}=\dfrac{z_B+z_C}{2} \Leftrightarrow z_D=z_B+z_C-z_A=3$

d) L'ensemble Γ est l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $\left|\frac{z-2-2i}{z-1+i}\right|=1$

$$\left|\frac{z-2-2i}{z-1+i}\right|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-(2+2i)}{z-(1-i)}\right|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-z_B}{z-z_C}\right|=1 \Leftrightarrow$$

$|z-z_B|=|z-z_C| \Leftrightarrow MB=MC$

Donc Γ est l'ensemble des points équidistants de B et C. c'est donc la médiatrice du segment $[BC]$ (c'est la droite (AD))

Méthode analytique : En posant $z=x+iy$:

$$\left|\frac{z-2-2i}{z-1+i}\right|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{(x-2)+i(y-2)}{(x-1)+i(y+1)}\right|=1$$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$

$\Leftrightarrow x+3y-3=0$ D'où l'ensemble Γ est la droite d'équation $x+3y-3=0$ c'est la médiatrice de $[BC]$

3° $\forall n\in\mathbb{N}$, on pose $z_n=(z_C)^n$ et $v_n=|z_n|$.

a) Vérifions que $z_C=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. On a

$|z_C|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ D'où :

$$z_C=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})\right)=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

– L'écriture trigonométrique de z_n :

$$z_n=(z_C)^n=\left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n=\left(2\sqrt{2}\right)^n e^{in\frac{\pi}{4}}$$

d'où $z_n=\left(2\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique :

$v_{n+1}=|z_{n+1}|=|(z_C)^{n+1}|=|z_C||(z_C)^n|=2\sqrt{2}|z_C|^n=2\sqrt{2}\times v_n$

$v_{n+1}=2\sqrt{2}\times v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q=2\sqrt{2}$ et de premier terme $v_0=|(z_C)^0|=1$

c) La limite de (v_n) :

$v_n=\left(2\sqrt{2}\right)^n$ et puisque $2\sqrt{2}>1$ alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty}$

Calcul de la somme $S_n=v_0+v_1+...+v_n$:

$$S_n=v_0\times\frac{1-(q)^{n+1}}{1-q}=\frac{1-\left(2\sqrt{2}\right)^{n+1}}{1-2\sqrt{2}}$$

Exercice 3 :

f est la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x-1+2xe^{-x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Calcul de limites :

On a $f(x)=2x-1+\left(\frac{2x}{e^x}\right)$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{e^x}\right)=-\infty\end{cases}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{e^x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\frac{e^x}{x}}\right)=0\end{cases}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{2}{e^x}\right)=2-0+\infty=+\infty$

Interprétation graphique

La courbe (C) admet une B.P de direction (Oy) au voisinage de $(-\infty)$

c) Montrons que la droite d'équation $y=2x-1$ est une asymptote oblique

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. D'autre part

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-1+2xe^{-x}-(2x-1)\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{e^x}\right)=0$$

Alors la droite D d'équation $y=2x-1$ est une asymptote oblique de (C) au voisinage de $(+\infty)$

Pour étudier la P.R de (C) et D on étudie le signe de $f(x)-y$: $f(x)-y=\frac{2x}{e^x}$ alors

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)-y	–	0	+
P.R.	D/(C)	∩	(C)/D

La droite D coupe (C) au point de cordonnées $(0;-1)$

2) a) Calcul des dérivés de f :

$f(x)=2x-1+2xe^{-x} \Rightarrow f'(x)=2+2e^{-x}+2x(-e^{-x})$

$\boxed{f'(x)=2+(2-2x)e^{-x}}$ et $\boxed{f''(x)=e^{-x}(-4+2x)e^{-x}}$

b) Le point d'inflexion de (C) :

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -4+2x=0 \Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	–	0	+

Puisque f'' s'annule et change de signe en $x_0=2$, et $f(2)=3+4e^{-2}$, le point $A=(2;f(2))$ est un point d'inflexion de la courbe (C) . $A=(2;3+4e^{-2})$

c) Les variations de f' :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	↘	$2-\frac{2}{e^2}$	↗

Le minimum de f' est positif, donc f' est positive

d) Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3° a) D'après l'étude et les variations de f : f est continue, strictement monotone et change de signe, alors la courbe (C) coupe l'axe (Ox) en un seul point d'abscisse α

D'autre part : $f(0.2) \approx -0.27$ et $f(0.3) \approx 0.04$

$f(0.2) \times f(0.3) < 0$ Alors $0.2 < \alpha < 0.3$

b) Pour que à (C) en un point d'abscisse x soit parallèle à l'asymptote D d'équation $y = 2x - 1$ il faut et il suffit que: $f'(x) = 2$

$f'(x) = 2 \Leftrightarrow f'(x) = 2 + (2-2x)e^{-x} = 2$

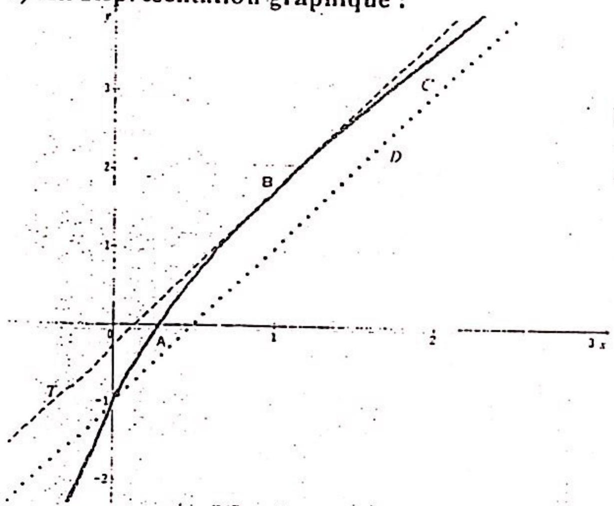
$\Leftrightarrow (2-2x)e^{-x} = 0$ or $e^{-x} > 0$

Donc 2 -2x = 0 et $\boxed{x = 1}$ et comme $f(1) = 1 + 2e^{-1}$ alors le point auquel la tangente est parallèle à D est $\boxed{B(1; 1+2e^{-1})}$

Equation de la tangente en B : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$\begin{cases} f'(1) = 2 \\ f(1) = 1 - 2e^{-1} \end{cases}$ donc $\boxed{T : y = 2x - 1 + 2e^{-1}}$

c) La Représentation graphique :



d) Discussion graphique, du nombre de solutions de l'équation : $-m - 1 + 2xe^{-x} = 0$

$-m - 1 + 2xe^{-1} = 0 \Leftrightarrow -1 + 2xe^{-1} = m$

$\Leftrightarrow 2x - 1 + 2xe^{-1} = 2x + m \Leftrightarrow f(x) = 2x + m$

Les solutions de l'équation $f(x) = 2x + m$ sont les abscisses des points d'intersections de la courbe (C) avec la droite D_m d'équation $y = 2x + m$ parallèle à D et à T. Alors

Si $m \leq -1$: il y a une seule solution

Si $-1 < m < -1 + 2e^{-1}$: il y a 2 solutions

Si $m = -1 + 2e^{-1}$: il y a une seule solution

Si $m > -1 + 2e^{-1}$: il n' y a pas de solution

Exercice 4 :

1) f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x + 2 + x\ln x}{x}$$

a) On a : $\lim_{x \to 0^+} (x + 2 + x\ln x) = 2$

Alors $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x + 2 + x\ln x}{x} = +\infty$

Interprétation graphique :

La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation : x = 0 (c'est l'axe des ordonnées)

b) $f(x) = \frac{x + 2 + x\ln x}{x} = \frac{x}{x} + \frac{2}{x} + \frac{x\ln x}{x} = 1 + \frac{2}{x} + \ln x$.

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} + \ln x\right) = 1 + 0 + (+\infty)$

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{\ln x}{x}\right) = 0$, $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0}$

Interprétation graphique :

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $(+\infty)$

2) a) $f(x) = \frac{2}{x} + 1 + \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-2 + x}{x^2}$

Tableau de variation de f

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2+ln2	↗	$+\infty$

b) Equations de la tangente T à (C) au point d'abscisse 1 :

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$\begin{cases} f'(1) = -1 \\ f(1) = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{T : y = -x + 4}$

3) g est la restriction de f sur $I =]0;2]$

a) Tableau de variation de g :

x	0		2
$g'(x)$		−	0
$g(x)$	$+\infty$	↘	2+ln2

D'après l'étude et le t. v. de g : g est continue et strictement croissante de $I =]0;2]$ sur $J = [2 + \ln 2; +\infty[$ donc g réalise une bijection de I sur J.

b) T.V de g^{-1}

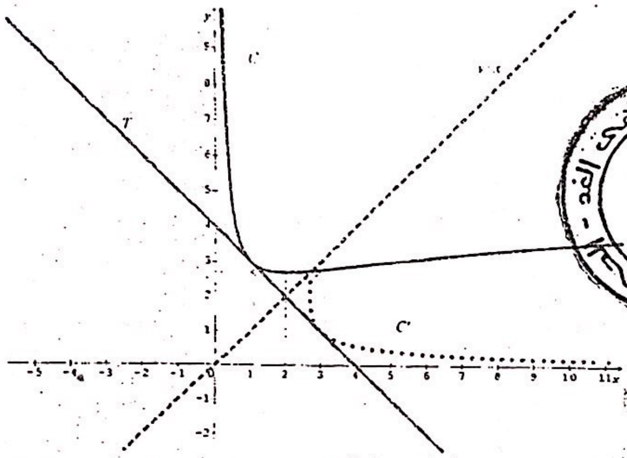
x	$2+\ln 2$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$(g^{-1})'(x)$	$-$
$g^{-1}(x)$	$2 \searrow 0$

c) Calcul de $(g^{-1})'(3)$

$$(g^{-1})'(3)=\frac{1}{g'(g^{-1}(3))}=\frac{1}{g'(1)}=-1$$

En effet $\begin{cases} g^{-1}(3)=1 \\ g'(1)=-1 \end{cases}$

d) La représentation graphique de (C) et (C')



4) On considère la fonction $h(x)=f(x)-x$

a) Les variations de h :

$$h'(x)=f'(x)-1=\frac{-2+x}{x^2}-1=\frac{-x^2+x-2}{x^2}$$

Résolvons l'équation : $-x^2+x-2=0$

$\Delta=1-4\times(-1)\times(-2)=-7<0$

Donc $-x^2+x-2<0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

D'après le T.V de h :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$-$
$h(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

D'après l'étude et les variations de h :

h est continue et strictement décroissante de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et comme $0\in\mathbb{R}$ alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α

or : $h(2)=\frac{4+2\ln 2}{2}-2\approx 0,69>0$

$h(3)=\frac{5+3\ln 3}{3}-3\approx -0,23<0$

$h(2)\times h(3)<0$ Donc $2<\alpha<3$

Comme $h(\alpha)=0$ alors $f(\alpha)-\alpha=0$ soit $f(\alpha)=\alpha$.

D'après le T.V de h :

$\forall x\geq\alpha,\ h(x)\leq 0 \Rightarrow \forall x\geq\alpha : \boxed{f(x)-x\leq 0}$

5) $\begin{cases} U_0=3 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$

a) Montrons par récurrence que: $U_n>\alpha,\quad \forall n\in\mathbb{N}$:

Initialisation : $U_0=3>\alpha$

Donc c'est vrai pour le 1[er] terme

Hérédité

Supposons que $U_n>\alpha$

Comme f est croissante sur $[1;+\infty[$ alors :

$f(U_n)>f(\alpha)$ d'ou $U_{n+1}>\alpha$

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n>\alpha$

b) Montrons que (U_n) est décroissante

D'après 4° b) on a : $\forall x\geq\alpha; \quad f(x)-x\leq 0$

Puisque $U_n\geq\alpha,\ \forall n\in\mathbb{N}$

Alors $f(U_n)-U_n\leq 0$

D'où $U_{n+1}-U_n\leq 0$

Donc (U_n) est décroissante

Puisque (U_n) décroissante et minorée (par α) alors $\boxed{(U_n)\text{ est convergente}}$

6) Calcul de $K=\int_1^e \ln x\,dx$

Par une intégration par parties :

$K=\int_1^e 1\times\ln x\,dx$

On pose : $\begin{cases} u'(x)=1 \rightarrow & u(x)=x \\ v(x)=\ln x \rightarrow & v'(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$

Alors :

$$K=[x\ln x]_1^e-\int_1^e\left(x\times\frac{1}{x}\right)dx=[x\ln x]_1^e-[x]_1^e=[x\ln x-x]_1^e$$

$\Rightarrow K=(e\ln e-e)-(1\ln 1-1)\Rightarrow \boxed{K=1}$

b) l'aire du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$ est

$$A=\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e\left(\frac{2}{x}+1+\ln x\right)dx$$

$$\Rightarrow A=\int_1^e\left(\frac{2}{x}+1\right)dx+k=[2\ln x+x]_1^e+k$$

$$A=(2\ln e+e)-(2\ln 1+1)+1\Rightarrow \boxed{A=(2+e)u.a.}$$

BAC 2018
Session Compl.

72

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
SERVICE DES EXAMENS

Baccalauréat 2018
Session Complémentaire

Honneur – Fraternité – Justice

Série : Sciences de la Nature
Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures
Coefficient : 6

Exercice 1 (3 points)

Soit (u_n) et (v_n) les suites numériques définies par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n + 2 \end{cases}$ et $v_n = u_n - 2n$.

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule est correcte.

1° (v_n) est une suite

A : arithmétique	B : géométrique	C : ni arithmétique et ni géométrique	(0,5pt)

2° L'expression de v_n en fonction de n est

A : $v_n = 2^n + 2n$	B : $v_n = 2 + \frac{1}{2}n$	C : $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$	(0,5pt)

3° Si (w_n) est la suite définie par $w_n = \ln(v_n)$ alors

A : $w_n = -(\ln 2)^n$	B : $w_n = -n\ln 2$	C : $w_n = 1 - 2\ln n$	(0,5pt)

4° La suite (w_n) est

A : bornée	B : convergente	C : divergente	(0,5pt)

5° La somme $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$ est égale à

A : $\frac{-(n^2+n)\ln 2}{2}$	B : $\frac{(n+1)(1-2\ln n)}{2}$	C : $\frac{1-(\ln 2)^{n+1}}{1-\ln 2}$	(0,5pt)

6° Le produit $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times ... \times v_n$ est égal à

A : $e^{\frac{-(n^2+n)\ln 2}{2}}$	B : $e^{\frac{(n+1)(1-2\ln n)}{2}}$	C : $e^{\frac{1-(\ln 2)^{n+1}}{1-\ln 2}}$	(0,5pt)

Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée :

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

1° a) Calculer $(4-2i)^2$. (0,5pt)

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2 + (2-4i)z - 6 = 0$. (0,75pt)

2° Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1+i$, $z_B = -3+3i$ et $z_C = \frac{(z_B)^3}{(z_A)^5}$.

a) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres z_A, z_B puis en déduire celle de z_C. (0,75pt)

b) Placer les points A et B dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$. (0,5pt)

c) Ecrire sous forme algébrique le nombre $\frac{z_B}{z_A}$ puis interpréter géométriquement. (0,5pt)

3° Pour tout nombre complexe $z \neq 1+i$; on pose : $f(z) = \frac{z+3-3i}{z-1-i}$.

a) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = i$. Interpréter géométriquement. (0,5pt)

b) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$. (0,5pt)

c) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M d'affixe z tel que f(z) soit imaginaire pur ou nul. (0,5pt)

d) Déterminer et construire Γ_3 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = \sqrt{5}$. (0,5pt)

73 BCAABCC

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+2-e^{x}$ et soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement. (0,75pt)

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x+2)\right)$. En déduire que Γ admet une asymptote oblique D dont on donnera une équation. (0,75pt)

c) Etudier la position relative entre Γ et D. (0,25pt)

2° a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f. (0,5pt)

b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β, $(\alpha<\beta)$, et que $-1.9<\alpha<-1.8$; $1.1<\beta<1.2$. (0,5pt)

c) Montrer que : $\alpha+f'(\alpha)=\beta+f'(\beta)$. (0,25pt)

3° Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I=\left]-\infty;0\right]$.

a) Montrer que h admet une réciproque, notée h^{-1}. (0,5pt)

b) Dresser le tableau de variation de h^{-1}. (0,25pt)

c) Montrer que $\left(h^{-1}\right)'(0)=\frac{-1}{1+\alpha}$. (0,25pt)

4° a) Déterminer le point A de la courbe Γ auquel la tangente T est perpendiculaire à D. Donner une équation de T. (0,5pt)

b) Tracer D , T , Γ et Γ' dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, où Γ' est la courbe de h^{-1} dans ce repère. (0,5pt)

Exercice 4 (7 points)

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par : $g(x)=-x+3-2\ln x$.

1° a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. (0,5pt)

b) Calculer $g'(x)$ où g' est la dérivée de g, puis dresser le tableau de variation de g. (0,5pt)

2° a) Montrer que g réalise une bijection de $\left]0,+\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on déterminera. (0,5pt)

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution λ et que $1.8\le\lambda\le1.9$. (0,5pt)

c) En déduire le signe de g sur l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$. (0,5pt)

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $I=\left]0,+\infty\right[$ par : $f(x)=\frac{x-1+\ln x}{x^{2}}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ et interpréter graphiquement. (0,5pt)

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et interpréter graphiquement. (0,5pt)

2°a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout x de I on a : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^{3}}$. (0,5pt)

b) Montrer que $f(\lambda)=\frac{\lambda+1}{2\lambda^{2}}$ et donner une valeur approchée de $f(\lambda)$ à 10^{-1} près. (0,5pt)

c) Dresser le tableau de variation de f. (0,5pt)

3° a) Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse $x_0=1$ (0,5pt)

b) Tracer (C) et T dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. (0,5pt)

c) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation : $\ln x=1-x+2x^{3}+mx^{2}$. (0,5pt)

4° a) A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale $J=\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x^{2}}dx$. (0,25pt)

b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$. (0,25pt)

Fin.

PROPPOSTION DU CORRIGE

Exercice 1

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse	B	C	B	C	A	A

Exercice 2

1° a) Calcul de $(4-2i)^2$

$(4-2i)^2 = 16-16i-4 = 12-16i$

b) Résolution de l'équation $z^2+(2-4i)z-6=0$:

$\Delta = (2-4i)^2-4\times1\times(-6) = 12-16i$

$= (4-2i)^2$

D'où les solutions de l'équation sont:

$$z' = \frac{-(2-4i)+(4-2i)}{2\times1} = 1+i$$

$$z'' = \frac{-(2-4i)-(4-2i)}{2\times1} = -3+3i.$$

Donc l'ensemble de solutions est $\{1+i;-3+3i\}$

2) a) Ecriture trigonométrique des nombres z_A, z_B et z_C

$z_A = 1+i \Rightarrow |z_A| = \sqrt{2}$

Si $\arg(z_A)=\theta_A$ alors $\begin{cases}\cos(\theta_A)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin(\theta_A)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$ d'où $\theta_A = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Alors $\boxed{z_A = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

$z_B = -3+3i \Rightarrow |z_B| = 3\sqrt{2}$

$$\arg(z_B)=\theta_B \Rightarrow \begin{cases}\cos(\theta_B)=\dfrac{-3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\\ \sin(\theta_B)=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases} \Rightarrow \theta_B = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

Alors $\boxed{z_B = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}$

Comme $z_C = \dfrac{(z_B)^3}{(z_A)^5}$ alors :

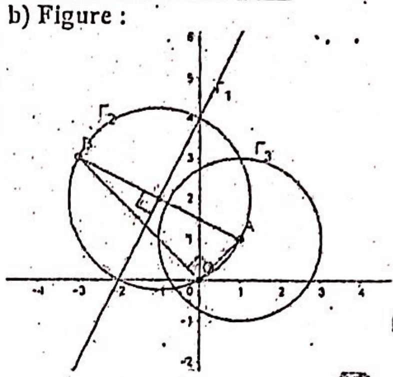
$$|z_C| = \frac{|z_B|^3}{|z_A|^5} = \frac{(3\sqrt{2})^3}{\sqrt{2}^5} = \frac{27}{2}$$

$$\arg(z_C) = \arg\frac{(z_B)^3}{(z_A)^5} = 3\arg(z_B)-5\arg(z_A) = 3\frac{\pi}{4}-5\frac{3\pi}{4}$$

$$= \pi[2\pi]$$

Alors : $\boxed{z_C = \frac{27}{2}(\cos\pi+i\sin\pi)}$

b) Figure :



c) La forme algébrique de $\dfrac{z_B}{z_A}$

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{-3+3i}{1+i} = \frac{3i(i+1)}{1+i} = 3i$$

Interprétation géométrique :

$$\frac{z_B}{z_A} = 3i \Leftrightarrow \frac{z_B-z_O}{z_A-z_O} = 3i$$

Donc le triangle OAB est rectangle en O.

3° Pour tout $z \neq 1+i$: $f(z) = \dfrac{z+3-3i}{z-1-i}$.

a) Résolution de l'équation $f(z)=i$

$$\frac{z+3-3i}{z-1-i} = i \Leftrightarrow z+3-3i = iz-i+1 \Leftrightarrow (1-i)z = -2+2i$$

Alors $z = \dfrac{-2+2i}{1-i} = \dfrac{-2(1-i)}{1-i} = -2.$

Si E est le point d'affixe $z_E=-2$ alors $f(z_E)=i$ donc le triangle ABE est rectangle isocèle en E.

b) Détermination et construction de Γ_1

$M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow |f(z)|=1$. Or $\forall z\neq 1+i$

$$|f(z)|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{z+3-3i}{z-1-i}\right|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-(-3+3i)}{z-(1+i)}\right|=1$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{z-z_B}{z-z_A}\right|=1 \Leftrightarrow |z-z_B|=|z-z_A| \Leftrightarrow MB=MA$$

Donc Γ_1 est l'ensemble des points équidistants de B et A ; c'est donc la médiatrice du segment $[AB]$ (voir la figure)

c) Détermination et construction de de Γ_2

$M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow f(z)\in i\mathbb{R}$ or : $\forall z\neq 1+i$

$$f(z)\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}\arg\left(\dfrac{z+3-3i}{z-1-i}\right)=\dfrac{\pi}{2}[\pi]\\ \text{ou } \dfrac{z+3-3i}{z-1-i}=0\end{cases}$$

3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \arg\left(\dfrac{z-(-3+3i)}{z-(1+i)}\right)=\dfrac{\pi}{2}[\pi] \\ \text{ou } z+3-3i=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\overline{MA},\overline{MB}\right)=\dfrac{\pi}{2}[\pi] \\ \text{ou } z=z_B \end{cases}$$

Alors l'ensemble Γ_2 est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A (voir la figure).

d) Détermination et construction de Γ_3 :

$M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow |f(z)-1|=\sqrt{5}$ or : $\forall z\neq 1+i$

$$|f(z)-1|=\sqrt{5} \Leftrightarrow \left|\frac{z+3-3i}{z-1-i}-1\right|=\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{z+3-3i-z+1+i}{z-1-i}\right|=\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{4-2i}{z-(1+i)}\right|=\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{5}}{AM}=\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow AM=\frac{1}{2}$$

Donc l'ensemble Γ_3 est le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$ (voir la figure)

Exercice 3 :

f est la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+2-e^x$ et soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Calcul de limites :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+2-e^x)=+\infty+2-(+\infty) \text{ F.I.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{e^x}{x}\right)\right)=+\infty(1+0-\infty)=-\infty$$

Donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{e^x}{x}\right)=1+0-\infty=-\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty}$$

Interprétation graphique

La courbe Γ admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $(+\infty)$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+2-e^x)=-\infty+2-0=-\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$$

$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x+2)\right)=\lim_{x\to-\infty}(e^x)=0$. On en déduit que Γ admet une asymptote oblique D d'équation : $y=x+2$ au voisinage de $-\infty$.

c) Pour étudier la position relative de Γ et D on étudie le signe de $f(x)-y$:

$f(x)-y=-e^x<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ alors la droite D est en dessous de la courbe Γ

2) a) Les variations de f :

$f(x)=x+2-e^x \Rightarrow \boxed{f'(x)=1-e^x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-e^x=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

Les variations de f :

X	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

b) La fonction f est continue sur $]-\infty;0]$ avec $f(]-\infty;0])=]-\infty,1]$ et comme $0\in]-\infty;1]$ alors d'après le T. V. I. l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]-\infty;0]$ de plus $f(-1.9)\approx-0.05$ et $f(-1.8)\approx0.03$ et $f(-1.9)\times f(-1.8)<0$ donc $-1.9<\alpha<-1.8$

De même, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution β dans $[0;+\infty[$ et comme $f(1.1)\approx0.09$ et $f(1.2)\approx-0.12$ et $f(1.1)\times f(1.2)<0$ donc $1.1<\beta<1.2$

Conclusion : l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β, $(\alpha<\beta)$

c) Démonstration de l'égalité : $\alpha+f'(\alpha)=\beta+f'(\beta)$

Nous savons que $f(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha+2-e^\alpha=0 \Rightarrow e^\alpha=\alpha+2$

Alors $1-e^\alpha=-\alpha-1 \Rightarrow f'(\alpha)=-\alpha-1$

D'où $\boxed{\alpha+f'(\alpha)=-1}$

D'une manière analogue on montre que $\boxed{\beta+f'(\beta)=-1}$

Alors $\boxed{\boxed{\alpha+f'(\alpha)=\beta+f'(\beta)}}$

3° h est la restriction de f sur l'intervalle $I=]-\infty;0]$

a) Existence de la réciproque de h, notée h^{-1} :

Voici le tableau de variations de h :

X	$-\infty$		0
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1

Puisque h est continue et strictement croissante de I sur $J=]-\infty;1]$, elle réalise donc une bijection de I sur J, et par conséquent h admet une réciproque, notée h^{-1} définie de J sur I.

b) Tableau de variation de h^{-1} :

X	$-\infty$	1

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3° a) D'après l'étude et les variations de f : f est continue, strictement monotone et change de signe, alors la courbe (C) coupe l'axe (Ox) en un seul point d'abscisse α

D'autre part : $f(0.2) \approx -0.27$ et $f(0.3) \approx 0.04$

$f(0.2) \times f(0.3) < 0$ Alors $0.2 < \alpha < 0.3$

b) Pour que à (C) en un point d'abscisse x soit parallèle à l'asymptote D d'équation $y = 2x - 1$ il faut et il suffit que: $f'(x) = 2$

$f'(x) = 2 \Leftrightarrow f'(x) = 2 + (2-2x)e^{-x} = 2$

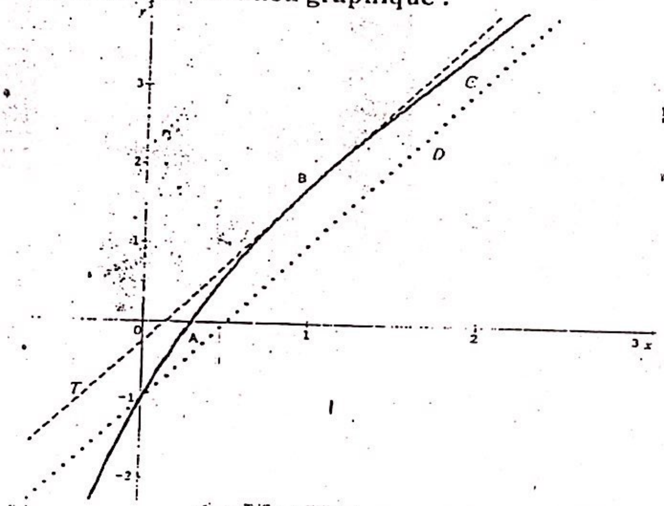
$\Leftrightarrow (2-2x)e^{-x} = 0$ or $e^{-x} > 0$

Donc $2 - 2x = 0$ et $\boxed{x = 1}$ et comme $f(1) = 1 + 2e^{-1}$ alors le point auquel la tangente est parallèle à D est $\boxed{B(1; 1+2e^{-1})}$

Equation de la tangente en B : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$\begin{cases} f'(1) = 2 \\ f(1) = 1 + 2e^{-1} \end{cases}$ donc $\boxed{T : y = 2x - 1 + 2e^{-1}}$

c) La Représentation graphique :



d) Discussion graphique, du nombre de solutions de l'équation : $-m - 1 + 2xe^{-x} = 0$

$-m - 1 + 2xe^{-1} = 0 \Leftrightarrow -1 + 2xe^{-1} = m$

$\Leftrightarrow 2x - 1 + 2xe^{-1} = 2x + m \Leftrightarrow f(x) = 2x + m$

Les solutions de l'équation $f(x) = 2x + m$ sont les abscisses des points d'intersections de la courbe (C) avec la droite D_m d'équation $y = 2x + m$ parallèle à D et à T. Alors

Si $m \leq -1$: il y a une seule solution

Si $-1 < m < -1 + 2e^{-1}$: il y a 2 solutions

Si $m = -1 + 2e^{-1}$: il y a une seule solution

Si $m > -1 + 2e^{-1}$: il n'y a pas de solution

Exercice 4 :

1) f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$f(x) = \dfrac{x + 2 + x\ln x}{x}$

a) On a : $\lim_{x\to 0^+}(x + 2 + x\ln x) = 2$

Alors $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x+2+x\ln x}{x} = +\infty$

Interprétation graphique :

La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation : $x = 0$ (c'est l'axe des ordonnées)

b) $f(x) = \dfrac{x+2+x\ln x}{x} = \dfrac{x}{x} + \dfrac{2}{x} + \dfrac{x\ln x}{x} = 1 + \dfrac{2}{x} + \ln x$

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{2}{x} + \ln x\right) = 1 + 0 + (+\infty)$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0}$

Interprétation graphique :

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $(+\infty)$

2) a) $f(x) = \dfrac{2}{x} + 1 + \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-2}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-2+x}{x^2}$

Tableau de variation de f

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$2+\ln 2$	$\nearrow$ $+\infty$

b) Equations de la tangente T à (C) au point d'abscisse 1 :

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$\begin{cases} f'(1) = -1 \\ f(1) = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{T : y = -x + 4}$

3) g est la restriction de f sur $I =]0;2]$

a) Tableau de variation de g :

x	0	2
$g'(x)$	$-$	0
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$2+\ln 2$

D'après l'étude et le t. v. de g : g est continue et strictement décroissante de $I =]0;2]$ sur $J = [2+\ln 2; +\infty[$ donc g réalise une bijection de I sur J

b) T.V de g^{-1}

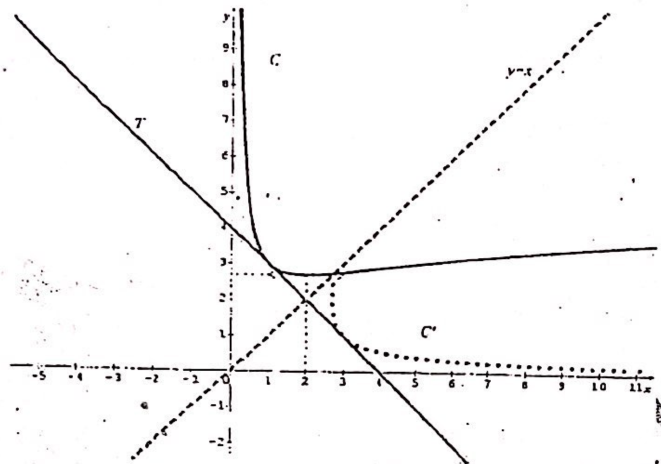
x	$2+\ln 2$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$(g^{-1})'(x)$	$-$
$g^{-1}(x)$	$2 \searrow 0$

c) Calcul de $(g^{-1})'(3)$

$$(g^{-1})'(3)=\frac{1}{g'(g^{-1}(3))}=\frac{1}{g'(1)}=-1$$

En effet $\begin{cases} g^{-1}(3)=1 \\ g'(1)=-1 \end{cases}$

d) La représentation graphique de (C) et (C')



4) On considère la fonction $h(x)=f(x)-x$

a) Les variations de h :

$$h'(x)=f'(x)-1=\frac{-2+x}{x^2}-1=\frac{-x^2+x-2}{x^2}$$

Résolvons l'équation : $-x^2+x-2=0$

$\Delta=1-4\times(-1)\times(-2)=-7<0$

Donc $-x^2+x-2<0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

D'après le T.V de h :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$-$
$h(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

D'après l'étude et les variations de h :

h est continue et strictement décroissante de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et comme $0\in\mathbb{R}$ alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α

or : $h(2)=\frac{4+2\ln 2}{2}-2\approx 0,69>0$

$h(3)=\frac{5+3\ln 3}{3}-3\approx -0,23<0$

$h(2)\times h(3)<0$ Donc $2<\alpha<3$

Comme $h(\alpha)=0$ alors $f(\alpha)-\alpha=0$ soit $f(\alpha)=\alpha$.

D'après le T .V de h :

$\forall x\geq\alpha,\ h(x)\leq 0 \Rightarrow \forall x\geq\alpha : \boxed{f(x)-x\leq 0}$

5) $\begin{cases} U_0=3 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$

a) Montrons par récurrence que: $U_n>\alpha,\quad \forall n\in\mathbb{N}$.

<u>Initialisation :</u> $U_0=3>\alpha$

Donc c'est vrai pour le 1^er^ terme

<u>Hérédité</u>

Supposons que $U_n>\alpha$

Comme f est croissante sur $[1;+\infty[$ alors :

$f(U_n)>f(\alpha)$. d'ou $U_{n+1}>\alpha$

<u>Conclusion :</u> $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n>\alpha$

b) Montrons que (U_n) est décroissante

D'après 4°.b) on à : $\forall x\geq\alpha;\quad f(x)-x\leq 0$

Puisque $U_n\geq\alpha,\ \forall n\in\mathbb{N}$

Alors $f(U_n)-U_n\leq 0$

D'où $U_{n+1}-U_n\leq 0$

Donc (U_n) est décroissante

Puisque (U_n) décroissante et minorée (par α) alors $\boxed{(U_n)\text{ est convergente}}$

6) Calcul de $K=\int_1^e \ln x\,dx$

Par une intégration par parties :

$K=\int_1^e 1\times\ln x\,dx$

On pose : $\begin{cases} u'(x)=1\rightarrow\ u(x)=x \\ v(x)=\ln x\rightarrow\ v'(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$

Alors :

$$K=[x\ln x]_1^e-\int_1^e\left(x\times\frac{1}{x}\right)dx=[x\ln x]_1^e-[x]_1^e=[x\ln x-x]_1^e$$

$\Rightarrow K=(e\ln e-e)-(1\ln 1-1)\Rightarrow \boxed{K=1}$

b) l'aire du domaine délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$ est

$$A=\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e\left(\frac{2}{x}+1+\ln x\right)dx$$

$$\Rightarrow A=\int_1^e\left(\frac{2}{x}+1\right)dx+k=[2\ln x+x]_1^e+k$$

$A=(2\ln e+e)-(2\ln 1+1)+1\Rightarrow \boxed{A=(2+e)\text{u.a.}}$

BAC 2019
Session Normale

...que Islamique de Mauritanie
...stère de l'Education Nationale
... de la Formation Professionnelle
...irection des Examens et des Concours

BACCALAUREAT 2019
Session Normale
Epreuve de MATHEMATIQUES

Série : Sciences de la Nature
Coefficient : 6
Durée : 4h

Exercice 1 (3 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_n = 3^n + n - 1$. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = \ln\left(\frac{-1+v_n}{2}\right)$.

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La suite (u_n) est :	arithmétique	géométrique	ni arithmétique, ni géométrique	0.5 pt
2	La suite (u_n) est	convergente	divergente	bornée	0.5 pt
3	Si $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$, alors la valeur de S_n est	$\frac{3^{n+1}-1}{2} + \frac{(n+1)(n-2)}{2}$	$\frac{1-3^{n+1}}{-2} + \frac{(n+1)(n-1)}{2}$	$\frac{1-3^{n+1}}{2} + \frac{(n+1)(n-2)}{2}$	0.5 pt
4	Le terme général de la suite (v_n) est :	$v_n = 2\times 3^n + 1$	$v_n = 2\times 3^n + 2n + 1$	$v_n = 3^n + 1$	0.5 pt
5	Le plus petit entier naturel n tel que $v_n \geq 2019$ est :	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	0.5 pt
6	Si $T_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$, alors la valeur de T_n est	$\frac{(n+1)^2}{2}\ln 3$	$\ln\left(\frac{3^{n+1}-1}{2}\right)$	$\frac{n^2+n}{2}\ln 3$	0.5 pt

Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

1° a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-3+4i$ — 0.5 pt

b) En déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^2 + (3-6i)z - 6 - 10i = 0$. — 0.5 pt

2° Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2+2i$; $z_B = i$ et $z_C = -1+4i$.

a) Placer les points A, B et C. — 0.5 pt

b) Déterminer la nature du triangle ABC. — 0.5 pt

c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme. — 0.25 pt

3° Pour tout nombre complexe $z \neq i$; on pose : $f(z) = \frac{z+1-4i}{z-i}$.

a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$. — 0.75 pt

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur. — 0.75 pt

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_3 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = \sqrt{2}$. — 0.75 pt

4° On pose, pour tout entier $n \geq 1$; $z_n = (z_A)^n$.

a) Ecrire z_n sous forme trigonométrique. — 0.25 pt

b) Déterminer la longueur du segment OM_{2019}, où M_{2019} est le point d'affixe z_{2019}. — 0.25 pt

Exercice 3 (6 points)

A. 1° Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y' + 4y = 0$. — 0.5 pt

2° Soit h la solution de (E) qui vérifie $h(0) = -1$ et $h'(0) = -1$. Montrer que $h(x) = (x-1)e^{2x}$. — 0.5 pt

. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = h(x) + 2x - 2 = (x-1)(2+e^{2x})$ et soit (C) sa ourbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

° a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement. — 1 pt

) Montrer que la droite D d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à (C) et étudier leurs positions elatives. — 0.75 pt

° a) Montrer que $f'(x) = 2 + (2x-1)e^{2x}$ et en déduire l'expression de $f''(x)$. (f' et f'' étant respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de f). — 0.5 pt

b) Montrer que le point $A(0;-3)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C). — 0.5 pt

c) Etudier les variations de f' et en déduire qu'elle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. — 0.5 pt

d) Dresser le tableau de variation de f. — 0.5 pt

3° a) Déterminer le point B de (C) où la tangente T est parallèle à la droite D. Ecrire une équation de T. — 0.5 pt

b) Tracer D ,T et (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. — 0.5 pt

c) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation $x - 1 = me^{-2x}$. — 0.25 pt

Exercice 4 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = (x+1)(1-\ln x)$ et Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. — 0.5 pt

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g. — 0.5 pt

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $]0;+\infty[$ une unique solution α telle que $1,7 < \alpha < 1,8$. — 0.5 pt

d) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$. — 0.25 pt

2° a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement. — 1 pt

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = g(x)$, où f' est la dérivée de f. — 0.5 pt

c) Dresser le tableau de variation de f. — 0.5 pt

3° a) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ où α est le réel trouvé dans la question 1°c). — 0.25 pt

b) Déterminer les points d'intersection de la courbe Γ avec l'axe (Ox). — 0.25 pt

4° Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I = [\alpha;+\infty[$.

a) Montrer que h réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J =]-\infty; f(\alpha)]$. — 0.25 pt

b) Calculer $(h^{-1})'(0)$. — 0.25 pt

c) Construire Γ et Γ' dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ où Γ' est la courbe de h^{-1}. — 0.5 pt

5° a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e (x-1)\ln x\,dx = \dfrac{e^2-3}{4}$. — 0.25 pt

b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$ — 0.5 pt

Fin

Solution

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 3^n+n-1$ et on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = \ln\left(\frac{-1+v_n}{2}\right)$.

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	La suite (u_n) est :	arithmétique	géométrique	ni arithmétique, ni géométrique
2	La suite (u_n) est :	convergente	divergente	bornée
3	Si $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ alors la valeur de S_n est	$\frac{3^{n+1}-1}{2}+\frac{(n+1)(n-2)}{2}$	$\frac{1-3^{n+1}}{-2}+\frac{(n+1)(n-1)}{2}$	$\frac{1-3^{n+1}}{2}+\frac{(n+1)(n-2)}{2}$
4	Le terme général de la suite (v_n) est :	$v_n = 2\times 3^n + 1$	$v_n = 2\times 3^n + 2n + 1$	$v_n = 3^n + 1$
5	Le plus entier naturel n tel que $v_n \geq 2019$ est :	n=6	n=7	n=8
6	Si $T_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ alors la valeur de T_n est	$\frac{(n+1)^2}{2}\ln3$	$\ln\left(\frac{3^{n+1}+1}{2}\right)$	$\frac{n^2+n}{2}\ln3$

Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau :

1. $u_0 = 3^0+0-1= 0$; $u_1 = 3^1+1-1 = 3$ et $u_2 = 3^2+2-1= 10$

$u_2 - u_1 = 10 - 3 = 7$ et $u_1 - u_0 = 3 - 0 = 3$.

Donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

(u_n) ne peut pas être une suite géométrique car $u_0 = 0$.

D'où (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(3^n + n - 1) = +\infty$

Donc la suite (u_n) est divergente.

3. $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (3^0 + 0 - 1) + (3^1 + 1 - 1) + (3^2 + 2 - 1) + \cdots + (3^n + n - 1)$

$= (3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^n) + (1 + 2 + \cdots + n) - \underbrace{(1 + 1 + 1 + \cdots + 1)}_{(n+1)\text{ terme}}$

Or $3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^n = \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{1-3^{n+1}}{-2} = \frac{3^{n+1}-1}{2}$; $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\underbrace{(1 + 1 + 1 + \cdots + 1)}_{(n+1)\text{ terme}} = 1(n + 1) = n + 1$

$\Rightarrow S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - (n + 1) = \frac{3^{n+1}-1}{2} + \frac{n(n+1)-2(n+1)}{2} = \frac{3^{n+1}-1}{2} + \frac{(n+1)(n-2)}{2}$

4. $v_n = u_{n+1} - u_n = 3^{n+1}+n+1-1-(3^n + n - 1) = 3^{n+1} - 3^n+1= (3 - 1)3^n + 1 = 2 \times 3^n + 1$

5. $v_n \geq 2019 \Rightarrow 2 \times 3^n + 1 \geq 2019 \Rightarrow 2 \times 3^n \geq 2018 \Rightarrow 3^n \geq 1009 \Rightarrow n\ln3 \geq \ln1009 \Rightarrow n \geq \frac{\ln1009}{\ln3} \Rightarrow n \geq 7$.

6. On a $w_n = \ln\left(\frac{-1+v_n}{2}\right) = \ln\left(\frac{-1+2\times3^n+1}{2}\right) = \ln\left(\frac{2\times3^n}{2}\right)\ \ln(3^n) = n\ln3$

$\Rightarrow T_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 0\ln3 + 1\ln3 + \cdots + n\ln3 = (1 + 2 + \cdots + n)\ln3 = \frac{n(n+1)}{2}\ln3 = \frac{n^2+n}{2}\ln3$

N°	1	2	3	4	5	6
Réponse	C	B	A	A	B	C

Exercice 2

1. a. Déterminer les racines carrées du nombre complexe −3+4i :

Déterminons alors les nombres complexes z tels que $z^2 = -3 + 4i$.

Posons $z= x + iy \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & (1) \\ x^2 + y^2 = 5 & (2) \\ 2xy = \quad 4 & (3) \end{cases}$

$(1) + (2) \Rightarrow 2x^2=2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x= 1$ ou $x = -1$.

(3) $2xy = 4 \Rightarrow y = \frac{2}{x}$. Si $x= 1$ alors $y=\frac{2}{1} = 2$ et si $x= -1$ alors $y=\frac{2}{-1} = -2$.

D'où les acines carrées de $-3 + 4i$ sont $1+2i$ et $1-2i$.

b. En déduire les solutions, dans C, de l'équation $z^2 + (3 - 6i)z - 6 - 10i = 0$:

$\Delta = (3 - 6i)^2 - 4 \times 1 \times (-6 - 10i) = 9 - 36 - 36i + 24 + 40i = -3 + 4i = (-3 + 4i)^2$

$z_1 = \frac{-3+6i+1+2i}{2} = \frac{-2+8i}{2} = -1 + 4i$ et $z_2 = \frac{-3+6i-1-2i}{2} = \frac{-4+4i}{2} = -2 + 2i$

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2 + 2i$, $z_B = i$ et $z_C = -1 + 4i$.

a. Placer les points A, B et C :(Voir la construction ci-après)

b. Déterminer la nature du triangle ABC :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1 + 4i + 2 - 2i}{i + 2 - 2i} = \frac{1 + 2i}{2 - i} = \frac{(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 + i + 4i - 2}{4 + 1} = \frac{5i}{5} = i.$$

Donc le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

c. Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme :

ABDC est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow z_D - z_C = z_B - z_A \Leftrightarrow z_D = z_B - z_A + z_C = i + 2 - 2i - 1 + 4i = 1 + 3i$.

3. Pour tout nombre complexe $z \neq 1$; on pose $f(z) = \frac{z+1-4i}{z-i}$.

a. Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$:

$|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z+1-4i}{z-i}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-z_C}{z-z_B}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-z_C|}{|z-z_B|} = 1 \Leftrightarrow \frac{MC}{MB} = 1 \Leftrightarrow MB=MC$.

Donc $\Gamma_1 = Med([BC]) = (AD)$.

b. Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tel que f(z) soit imaginaire pur :

$f(z)$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow \frac{z+1-4i}{z-i} \Leftrightarrow \frac{z-z_C}{z-z_B}$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z-z_C}{z-z_B} = 0 \\ \arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z - z_C = 0 \\ \arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z = z_C \\ \arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M = C \\ (\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$

r l'année scolaire 2019-2020

iation de f :

α	+∞
0	−
f(α)	−∞

$\frac{-1)^2}{\alpha}$ où α est le réel trouvé dans la question 1.c :

$\ln\alpha)$ or $g(\alpha)=\frac{1}{\alpha}-\ln\alpha=0\Rightarrow\ln\alpha=\frac{1}{\alpha}$.

$=f(\alpha)=(\alpha-1)\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)=(\alpha-1)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$

intersection de la courbe Γ avec l'axe (Ox) :

$(x-1)(1-\ln x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=0\\1-\ln x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\x=e\end{cases}$

isses aux points d'abscisses respectives x=1 et x=e.

sur l'intervalle $I=[\alpha;+\infty[$.

ie bijection de I sur l'intervalle $J=]-\infty;f(\alpha)]$:

it décroissante alors elle réalise une bijection de I sur l'intervalle J.

ibre réel car $f'(\alpha)=0$.

le repère (O ;$\vec{i}$; $\vec{j}$) où Γ' est la courbe de h^{-1} :(Voir la figure ci-après).

tion par parties, montrer que $\int_1^e(x-1)\ln x\,dx=\frac{e^2-3}{4}$:

$\cdot-x$

$\left.x)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\frac{1}{x}dx=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-1\right)dx$

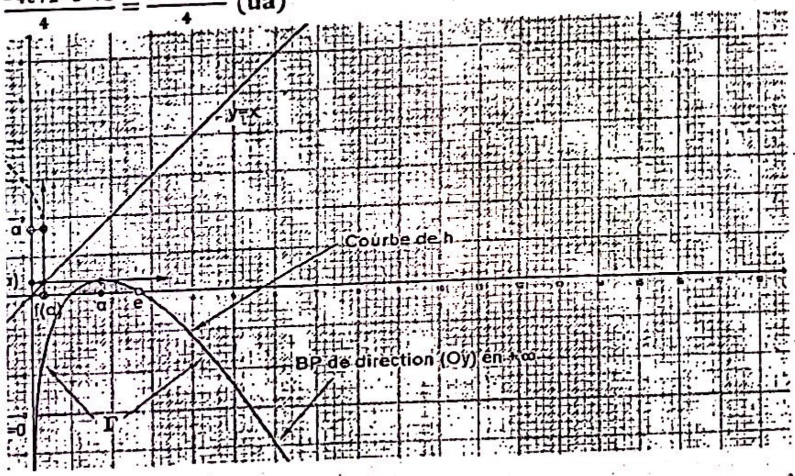
$\left.-x\right]_1^e=\frac{e^2}{2}-e-\frac{e^2}{4}+e+\left(\frac{1}{4}-1\right)=\frac{e^2-3}{4}$

iaine plan délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x=1

lélimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x=1 et x=e est

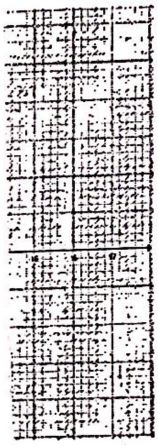
$1-\ln x)\,dx=\int_1^e(x-1)\,dx-\int_1^e(x-1)\ln x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^e-\frac{e^2-3}{4}=\frac{e^2}{2}-e-\left(\frac{1}{2}-1\right)-\frac{e^2+3}{4}$

$\frac{-4e+2-e^2+3}{4}=\frac{e^2-4e+5}{4}$ (ua)



$)-1|=\sqrt{5}$:

$-z_B|=\sqrt{5}\Rightarrow MB=BA$



0 :

$=2$.

$)e^{2x}$

$1)e^{2x}$:

x

$=-1\Rightarrow$ $=-1-2b=-1+2=1$.

)it (C) sa courbe représentative

)réter graphiquement :

o.

position relatives :

e^{2x}

;t)

2-41813182-33318689

BAC 2019
Session Compl.

Bac 2019 session complémentaire

Énoncé

Exercice 1

Soit f une fonction numérique dérivable sur son domaine de définition et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ;\vec{i} ;\vec{j})$.

On donne, ci-contre, le tableau de variation de f.

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

x	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
f'(x)		0		0		‖	
f(x)	-1 ↗	3	↘	-1	↘ $-\infty$	‖ -3	↗ 2

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	L'ensemble de définition de f est	$]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$	$]-\infty,3[\cup[3,+\infty[$	$]-\infty,+\infty[$
2	La fonction f est	paire	impaire	ni paire, ni impaire
3	La courbe (C) coupe (Ox) en	3 points	2 points	1 seul point
4	Le nombre d'asymptote de la courbe (C) est	Une seule	deux	trois
5	Le nombre de tangentes horizontale de (C) est	1	2	3
6	Le nombre de de solutions de l'équation $f(x) = -2$ est	1	2	3

Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse.

Aucune justification n'est demandée.

N°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2

1. Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z) = z^3 - (4-i)z^2 + 7z - 4 + 7i$.

a. Déterminer les racines carrés de $-12-16i$.

b. Calculer $P(-i)$.

c. Déterminer les réels a et b tels que $\forall z \in \mathbb{C}$, on a : $P(z) = (z+i)(z^2 + az + b)$.

d. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(x) = 0$.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 1+2i$, $z_B = -i$ et $z_C = 3-2i$.

a. Placer les points A, B et C.

b. Soit D le point tel que ABCD soit un parallélogramme. Justifier que $z_D = 4+i$.

c. Ecrire sous forme algébrique $\frac{z_D - z_C}{z_D - z_A}$ et en déduire la nature du triangle ACD.

3. Pour tout nombre complexe $z \neq 1+2i$; on pose $f(z) = \frac{z-3+2i}{z-1-2i}$.

a. Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$.

b. Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = \sqrt{20}$.

4. On pose $\alpha = \frac{z_A + z_B}{2\sqrt{2}}$ et pour tout entier naturel n, on note $u_n = |\alpha^n|$.

a. Ecrire α sous forme algébrique et vérifier que $u_n = \frac{1}{2^n}$.

b. En déduire que (u_n) est une suite géométrique et montrer que $u_0 + u_1 + \cdots + u_{2019} = 2 - \frac{1}{2^{2019}}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(-1) = 0$ et $\forall x > -1$, $f(x) = (x+1)^2\ln(x+1) - (x+1)$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ;\vec{i} ;\vec{j})$.

1. a. Vérifier que $\forall x > -1$, $f(x) = (x+1)[(x+1)\ln(x+1) - 1]$.

b. Monter que $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{f(x)}{x+1} = -1$ $\left(\text{on donne la limite suivante } \lim\limits_{x\to -1^+}(x+1)\ln(x+1) = 0\right)$.

c. En déduire que f est continu et dérivable à droite de -1.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement.

2. a. Montrer que $\forall x > -1$, $f'(x) = 2(x+1)\ln(x+1) + x$, (f' étant la dérivée de f).

b. En remarquant que $\forall x > -1$, le signe de $2(x+1)\ln(x+1)$ est celui de x, montrer que f' est négatif sur $]-1,0[$ et positif sur $]0,+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

3. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

a. Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J, à déterminer.

b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α, avec $0{,}7\leq\alpha\leq 0{,}8$.

c. Justifie que $g'(x)=\alpha+2$ et en déduire la valeur de $(g^{-1})(0)$, où g^{-1} est la réciproque de g).

4. Tracer dans le même repère les courbes (C) et (C') ; ((C') étant la courbe de g^{-1}).

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x)=(2x-2)(1+e^x)$ et soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(2x-2))$.

b. En déduire que la droite D d'équation $y=2x-2$ est une asymptote pour Γ. Etudier la position relative entre Γ et D.

2. a. Calculer $f'(x)$ et justifier que $f''(x)=(2x+2)e^x$. (f' et f'' étant les respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de f).

b. Etudier les variations de f' et en déduire que $\forall x\in\mathbb{R}$. $f'(x)>0$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

3. a. Déterminer le point d'intersection de Γ avec (Ox).

b. Ecrire une équation de la tangente T au point d'abscisse 0 de Γ.

c. Tracer D , T et Γ dan le repère$(O;\vec{i};\vec{j})$.

d. Discuter graphiquement, selon les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solution de l'équation $(2x-2)e^x=2+m$.

4. a. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\int_0^1(2x-2)e^x\,dx$.

b. En déduire l'aire A de la partie du plan délimitée par Γ, l'axe (Ox) et les droites d'équations respectives x=0 et x=1.

Solution

Exercice 1

Soit f une fonction numérique dérivable sur son domaine de définition et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On donne, ci-contre, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
f'(x)		0	0	||	
f(x)	-2 ↗	3 ↘	-1 ↘	$-\infty$ || -3 ↗	2

Compléter le tableau :

1. Domaine de définition de f est $\mathbb{R}\backslash\{3\}=]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$.
2. La fonction f est ni paire, ni impaire.
3. La courbe (C) coupe (Ox) en 3 points.
4. Le nombre d'asymptote de la courbe (C) est trois telles que x=3, y=−2 en $-\infty$ et y=2 en $+\infty$.
5. Le nombre de tangentes horizontale de (C) est 2 car la dérivée s'annule en deux points d'abscisses respectives x=−3 et x=0.
6. Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=-2$ est 2.

N°	1	2	3	4	5	6
Réponse	A	C	A	C	B	B

Exercice 2

1. Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z)=z^3-(4-i)z^2+7z-4+7i$.

a. Déterminer les racines carrés de $-12-16i$:

Déterminons alors les nombres complexes z tels que $z^2=-12-16i$.

Posons $z=x+iy \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-12 & (1)\\ x^2+y^2=\sqrt{144+256} & (2)\\ 2xy=\quad -16 & (3)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-12 & (1)\\ x^2+y^2=20 & (2)\\ 2xy=-16 & (3)\end{cases}$

$(1)+(2)\Rightarrow 2x^2=8\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=2$ ou $x=-2$.

(3) $2xy=-16\Rightarrow y=\frac{-8}{x}$. Si $x=2$ alors $y=\frac{-8}{2}=4$ et si $x=-2$ alors $y=\frac{-8}{-2}=4$.

D'où les racines carrées de $-12-16i$ sont $2-4i$ et $-2+4i$.

b. Calculer $P(-i)$:

$P(z)=(-i)^3-(4-i)(-i)^2+7(-i)-4+7i=i+4-i-7i-4+7i=0$

Préparé par : Abmed Eljeilani Med Youmbabe 22056962-41813182-33318689

c. Déterminer les réels a et b tels que $\forall z \in \mathbb{C}$, on a : $P(z) = (z+i)(z^2+az+b)$:

Tableau d'Hôrner :

	1	$-4+i$	7	$-4+7i$
$-i$		$-i$	$4i$	$4-7i$
	1	-4	$7+4i$	0

$\Rightarrow a = -4$ et $b = 7+4i$.

D'où $P(z) = (z+i)(z^2-4z+7+4i)$.

d. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(x) = 0$:

$P(z) = 0 \Rightarrow (z+i)(z^2-4z+7+4i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z+i = 0 \\ z^2-4z+7+4i = 0 \end{cases}$

•$z+i = 0 \Rightarrow z_0 = -i$.

•$z^2-4z+7+4i = 0$:

$\Delta = (-4)^2 - 4\times 1\times(7+4i) = 16-28-16i = -12-16i$

Les racines carrées de Δ sont $\Delta_1 = 2-4i$ et $\Delta_2 = -\Delta_1 = -2+4i$

$z_1 = \frac{-b+\Delta_1}{2a} = \frac{4+2-4i}{2} = 3-2i$ et $z_2 = \frac{-b-\Delta_1}{2a} = \frac{4-2+4i}{2} = 1+2i$.

Donc $S = \{-i\,;\,3-2i\,;\,1+2i\}$.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 1+2i$, $z_B = -i$ et $z_C = 3-2i$.

a. Placer les points A, B et C :(voir la figure).

b. Soit D le point tel que ABCD soit un parallélogramme. Justifier que $z_D = 4+i$.

ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_D - z_A = z_C - z_B \Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A = 3-2i+i+1+2i = 4+i$.

c. Ecrire sous forme algébrique $\frac{z_D-z_C}{z_D-z_A}$ et en déduire la nature du triangle ACD.

$\frac{z_D-z_C}{z_D-z_A} = \frac{4+i-3+2i}{4+i-1-2i} = \frac{1+3i}{3-i} = \frac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i+9i-3}{9+1} = \frac{10i}{10} = i$.

Comme $\frac{z_D-z_C}{z_D-z_A} = i$ alors le triangle ACD est rectangle, isocèle en D.

3. Pour tout nombre complexe $z \neq 1+2i$; on pose $f(z) = \frac{z-3+2i}{z-1-2i}$.

a. Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$:

$|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-3+2i}{z-1-2i}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-z_C}{z-z_A}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-z_C|}{|z-z_A|} = 1 \Leftrightarrow \frac{MC}{MA} = 1 \Leftrightarrow MA=MC$.

Donc $\Gamma_1 = \mathrm{Med}([AC]) = (BD)$.

b. Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)-1| = \sqrt{20}$:

$f(z)-1 \Rightarrow \frac{z-3+2i}{z-1-2i} - 1 = \frac{z-3+2i-z+1+2i}{z-1-i} = \frac{-2+4i}{z-1-2i}$

$|f(z)-1| = \sqrt{20} \Rightarrow \left|\frac{-2+4i}{z-1-2i}\right| = \sqrt{20} \Rightarrow \frac{|-2+4i|}{|z-z_A|} = \sqrt{20} \Rightarrow \frac{\sqrt{20}}{|z-z_A|} = \sqrt{20} \Rightarrow |z-z_A| = 1 \Rightarrow MA = 1$.

D'où $\Gamma_2 = C_{(A\,;\,1)}$.

4. On pose $\alpha = \frac{z_A+z_B}{2\sqrt{2}}$ et pour tout entier naturel n, on note $u_n = |\alpha^n|$.

a. Ecrire α sous forme algébrique et vérifier que $u_n = \frac{1}{2^n}$:

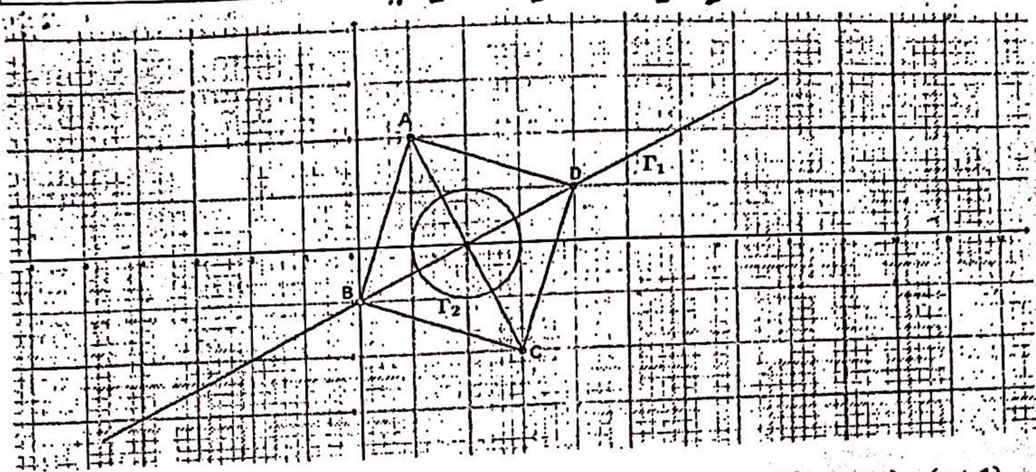
$\alpha = \frac{z_A+z_B}{2\sqrt{2}} = \frac{1+2i-i}{2\sqrt{2}} = \frac{1+i}{2\sqrt{2}} \Rightarrow u_n = |\alpha^n| = u_n = \left|\left(\frac{1+i}{2\sqrt{2}}\right)^n\right| = \left|\frac{(1+i)^n}{(2\sqrt{2})^n}\right| = \frac{|(1+i)^n|}{|(2\sqrt{2})^n|} = \frac{(\sqrt{2})^n}{(2\sqrt{2})^n} = \frac{(\sqrt{2})^n}{2^n\times(\sqrt{2})^n} = \frac{1}{2^n}$

b. En déduire que (u_n) est une suite géométrique et montrer que $u_0+u_1+\cdots+u_{2019} = 2-\frac{1}{2^{2019}}$:

On a $u_n = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$u_0+u_1+\cdots+u_{2019} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2019} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2020}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2020}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2020}\right) = 2-\frac{1}{2^{2019}}$$

Préparé par : Ahmed Eljeilani Med Youmbabe 22056962-41813182-33318689



Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(-1)=0$ et $\forall x>-1$, $f(x)=(x+1)^2\ln(x+1)-(x+1)$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a. Vérifier que $\forall x>-1$, $f(x)=(x+1)[(x+1)\ln(x+1)-1]$.

b. Monter que $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{f(x)}{x+1}=-1$ (on donne la limite suivante $\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)\ln(x+1)=0$).

c. En déduire que f est continu et dérivable à droite de -1.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement.

2. a. Montrer que $\forall x>-1$, $f'(x)=2(x+1)\ln(x+1)+x$, (f' étant la dérivée de f).

b. En remarquant que $\forall x>-1$, le signe de $2(x+1)\ln(x+1)$ est celui de x, montrer que f' est négatif sur $]-1,0[$ et positif sur $]0,+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

3. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

a. Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J, à déterminer.

b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α, avec $0{,}7\le\alpha\le 0{,}8$.

c. Justifie que $g'(x)=\alpha+2$ et en déduire la valeur de $(g^{-1})(0)$, où g^{-1} est la réciproque de g).

4. Tracer dans le même repère les courbes (C) et (C') ; ((C') étant la courbe de g^{-1}).

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x)=(2x-2)(1+e^x)$ et soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-2)(1+e^x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-2)\times\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^x)=+\infty\times(+\infty)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x-2)(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^x)=+\infty\times(+\infty)=+\infty$.

Donc Γ admet BP de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(2x-2))$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-2)(1+e^x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-2)\times\lim\limits_{x\to-\infty}(1+e^x)=-\infty\times 1=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(2x-2))=\lim\limits_{x\to-\infty}\left((2x-2)(1+e^x)-(2x-2)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left((2x-2)(1+e^x-1)\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-2)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}(2xe^x-2e^x)=2\times 0-2\times 0=0$.

b. En déduire que la droite D d'équation $y=2x-2$ est une asymptote pour Γ. Etudier la position relative entre Γ et D :

La droite $D: y=2x-2$ est une asymptote oblique pour Γ au voisinage de $-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(2x-2))=0$.

Position relative :

$f(x)-(2x-2)=(2x-2)e^{x}$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-(2x-2)$	$-$	0	$+$
PR	$\frac{D}{(C)}$	$D\cap(C)$	$\frac{(C)}{D}$

2. a. Calculer $f'(x)$ et justifier que $f''(x)=(2x+2)e^{x}$. (f' et f'' étant les respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de f) :

$f'(x)=2(1+e^{x})+e^{x}(2x-2)=2+(2+2x-2)e^{x}=2+2xe^{x}$.

$f''(x)=2(xe^{x}+e^{x})=(2x+2)e^{x}$.

b. Etudier les variations de f' et en déduire que $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)>0$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	$2-\frac{2}{e}$	$\nearrow$

$f(-1)=2-2e^{-1}=2-\frac{2}{e}>0$.

D'après le tableau de variation de f' alors $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)\geq 2-\frac{2}{e}>0$.

D'où $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)>0$.

c. Dresser le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3. a. Déterminer le point d'intersection de Γ avec (Ox) :

Γ coupe (Ox) au point d'abscisse x telle que $f(x)=0$.

$f(x)=0$ $\Gamma \Rightarrow (2x-2)(1+e^{x})=0 \Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow x=1$.

b. Ecrire une équation de la tangente T au point d'abscisse 0 de Γ :

$T: y=f'(0)(x-0)+f(0) \Rightarrow T: y=2(x-0)-4 \Rightarrow T: y=2x-4$.

c. Tracer D, T et Γ dan le repère$(O;\vec{i};\vec{j})$:

d. Discuter graphiquement, selon les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solution de l'équation $(2x-2)e^{x}=2+m$:

$(2x-2)e^{x}=2+m \Leftrightarrow f(x)-(2x-2)=2+m \Leftrightarrow f(x)=2+m+2x-2 \Leftrightarrow f(x)=2x+m$.

m	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
Nbre de solutions		0	1	2	1	1	

4. a. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\int_0^1 (2x-2)e^x\,dx$:

$$\left.\begin{array}{l} u'(x) = e^x \\ v(x) = 2x-2 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u(x) = e^x \\ v'(x) = 2 \end{array}\right|$$

$\Rightarrow \int_0^1 (2x-2)e^x\,dx = [(2x-2)e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx = [(2x-2)e^x]_0^1 - [2e^x]_0^1 = 2 - 2e + 2 = 4 - 2e.$

b. En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x=1 et x=e :

L'aire A du domaine plan délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x=1 et x=e est égala à :

$A = \int_0^1 -f(x)\,dx = \int_0^1 -(2x-2)(1+e^x)\,dx = -\int_0^1 (2x-2)\,dx - \int_0^1 (2x-2)e^x\,dx = -[x^2-2x]_0^1 - (4-2e).$

$= 1 - 4 + 2e = (2e-3)(ua).$

Fin

Bonne compréhension

et

Bonne réussite

BAC 2020
Session Normale

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale, de la Formation Technique et de la Reforme
Direction des Examens et des Concours

BACCALAUREAT 2020
Session Normale
Epreuve : MATHEMATIQUES

Série : Sciences de la Nature
Coefficient : 6
Durée : 4h

Exercice 1 : (3 points)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel non nul n par :

$u_n = \dfrac{n}{2n^2+n}$ et $v_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on donne $x_n = \dfrac{1}{u_n}$ et $y_n = \ln(v_n)$.

Pour chacune des six questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La valeur de x_5 est	6	11	16	(0.5 pt)
2	La limite de la suite (u_n) est	0	$\dfrac{1}{2}$	1	(0.5 pt)
3	La suite (v_n) est une suite	Croissante	Décroissante	Non monotone	(0.5 pt)
4	La suite (x_n) est une suite	Arithmétique	Géométrique	Convergente	(0.5 pt)
5	Le terme général de la suite (y_n) est	$y_n = \dfrac{1}{3}\ln n$	$y_n = -n\ln 3$	$y_n = n\ln 3$	(0.5 pt)
6	La somme $v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ est égale à	$\dfrac{1}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$	$\dfrac{1}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}\right)$	$\dfrac{1}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}\right)$	(0.5 pt)

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée

Question n°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Réponse						

Exercice 2 : (6 points)

1° Pour tout complexe z on pose : $P(z) = z^3 - (7+7i)z^2 + (-2+30i)z + 32 - 16i$

a) Calculer $P(2i)$ — 0.5pt

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout z, on a : — 0.5pt
$P(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)$

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$ — 0.5pt

2° Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 3+i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 4+4i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ — 1pt

b) Déterminer la nature du triangle ABC — 0.5pt

c) Déterminer l'affixe z_D du point D tel que ABDC soit un parallélogramme. Placer D. — 0.5pt

3° Pour tout nombre complexe $z \neq 3+i$; on pose : $f(z) = \dfrac{z-2i}{z-4-4i}$.

a) Vérifier que $f(z_D) = -i$ et interpréter graphiquement. — 0.5pt

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$ — 0.5pt

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z) - 1| = \sqrt{2}$ — 0.5pt

4° On pose $z_0 = f(6)$ et pour tout entier naturel n on note $z_n = z_0^n$

a) Ecrire z_0 sous forme algébrique, puis vérifier que $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. — 0.5pt

33167

b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $|z_n| \geq 2020$. 0.25pt

c) Vérifier que le point d'affixe z_{2020} appartient à l'axe des abscisses. 0.25pt

Exercice 3 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 2 + e^{-x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1° a) Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x-2)) = 0$ 0.5 pt

b) En déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe (C) puis étudier leur position relative. 0.75 pt

2° a) Montre que $f(x) = \dfrac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x}$ et que $\dfrac{f(x)}{x} = 1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{xe^x}$. 0.5 pt

b) En déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement 0.75 pt

3° Justifier que $f'(x) = 1 - e^{-x}$ et dresser le tableau de variation de f. 0.5 pt

4° a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $\beta < \alpha$ puis vérifier que $1,8 < \alpha < 1,9$. 0.5 pt

b) Justifier que $f'(\alpha) = \alpha - 1$ 0.25 pt

5° Construire la courbe (C) et son asymptote (Δ) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. 0.25 pt

Exercice 4 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x - x\ln x & \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et en déduire que f est continue en 0^+. 0.75pt

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ et interpréter graphiquement. 0.5pt

c) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter graphiquement. 1 pt

2° Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f. 1 pt

3° a) Déterminer les points d'intersection de la courbe (Γ) avec l'axe des abscisses. 1pt

b) Donner une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse e. 0.5pt

4° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$.

a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera. 0.5pt

b) Montrer que $(g^{-1})'(0) = -1$ où g^{-1} est la réciproque de g. 0.5pt

c) Construire (T), (Γ) et (Γ') dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (Γ') étant la courbe représentative de g^{-1}. 0.5pt

d) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $2x - x\ln x = m$ 0.25pt

5° a) Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale $A = \int_1^e x\ln x\,dx$. 0.25pt

b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. 0.25pt

Fin

CORRECTION DU BAC D 2020
Session Normale

Série : SN
Épreuve : Mathématique
Durée : 4heures
Coefficient : 6

DATE : 22/09/2020

Exercice 1 (3 points)

N° Question	1	2	3	4	5	6
Réponse	B	A	B	A	B	B
Note	0,5pt	0,5pt	0,5pt	0,5pt	0,5pt	0,5pt

Exercice 2 (6 points)

1. $P(Z) = Z^3 - (7+7i)Z^2 + (-2+30i)Z + 32 - 16i$

a) $P(2i) = (2i)^3 - (7+7i)(2i)^2 + (-2+30i)(2i) + 32 - 16i$

$= -8i + 28 + 28i - 4i - 60 + 32 - 16i = 60 - 60 + 28i - 28i$

$\boxed{P(2i) = 0}$ $\boxed{0,5}$

b) $P(Z) = (Z - 2i)(Z^2 + aZ + b)$

1^{ere} Méthode : Tableau HÖRNER

	1	$-7-7i$	$-2+30i$	$-32-16i$
$2i$	↓	$2i$	$10-14i$	$-32+16i$
	1	$-7-5i$	$8+16i$	0
		a	b	

$\boxed{P(Zi) = (Z - 2i)(Z^2 - (7+5i)Z + 8 + 16i)}$ $\boxed{0,5}$

2^{eme} Méthode : Identification

$P(Zi) = (Z - 2i)(Z^2 + aZ + b)$

$= Z^3 + (a - 2i)Z^2 + (b - 2ai)Z - 2bi$

$= Z^3 - 10Z^2 + 33Z - 34$

Par identification on a :

$$\begin{cases} a - 2i = 7 - 7i \Leftrightarrow \boxed{a = -7 - 5i} \\ b - 2ai = -2 + 30i \\ -2bi = -32 - 16i \Leftrightarrow \boxed{b = 8 + 16i} \end{cases}$$

$\boxed{P(Zi) = (Z - 2i)(Z^2 - (7+5i)Z + 8 + 16i)}$

c) $\boxed{P(Zi) = (Z - 2i)(Z^2 - (7+5i)Z + 8 + 16i) = 0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z - 2i = 0 \Leftrightarrow Z = 2i \\ \text{ou} \\ Z^2 - (7+5i)Z + 8 + 16i = 0 \end{cases}$$

$\Delta = [-(7+5i)]^2 - 4(1)(8+16i) = 49 + 70i - 25 - 32 - 64i$

$\Delta = -8 + 6i$

On pose $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$

$|\Delta| = \sqrt{(-8)^2 + (6)^2} = \sqrt{100} = 10 \Leftrightarrow \boxed{|\Delta| = 10}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| = 10 & (1) \\ x^2 - y^2 = Re(\Delta) = -8 & (2) \\ 2xy = Im(\Delta) = 6 & (3) \end{cases}$$

(1) + (2) $2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

(1) − (2) $2y^2 = 18 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3$

De (3) on a $2xy = 6 \Leftrightarrow xy = 3 > 0$

donc x et y sont de même signe d'où

$\boxed{Z_1 = 1 + 3i}$ et $\boxed{Z_2 = -1 - 3i}$

$Z_1 = \frac{7+5i-1-3i}{2} \Leftrightarrow Z_1 = \frac{6+2i}{2} \Leftrightarrow \boxed{Z_1 = 3 + i}$

$Z_2 = \frac{7+5i+1+3i}{2} \Leftrightarrow Z_1 = \frac{8+8i}{2} \Leftrightarrow \boxed{Z_2 = 4 + 4i}$

$S = \{2i, 3+i, 4+4i\}$ $\boxed{0,5}$

2.a) $Z_A = 3 + i \Leftrightarrow A(3,1)$

$Z_B = 2i \Leftrightarrow B(0,2)$

$Z_C = 4 + 4i \Leftrightarrow C(4,4)$

Voir figure

$\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} = \frac{3+i-2i}{3+i-4-4i} = \frac{3-i}{-1-3i} = \frac{-3+i}{1+3i} \times \frac{1-3i}{1-3i} = \frac{-3+9i+i+3}{10} = i$

$\boxed{\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} = i}$

$$\begin{cases} \left|\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C}\right| = 1 \\ \text{Arg}\left(\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AB}{AC} = 1 \Leftrightarrow AB = AC \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

Donc ABC est un triangle rectangle et isocèle en A $\boxed{0,5}$

c) $ABDC$ est un paraléllogramme ssi

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow z_D - z_C = z_B - z_A$

$\Leftrightarrow z_D = z_B - z_A + z_C \Leftrightarrow z_D = 2i - 3 - i + 4 + 4i$

$\Leftrightarrow \boxed{z_D = 1 + 5i} \Leftrightarrow D(1,5)$ $\boxed{0,25}$

3. $f(Z) = \frac{Z-2i}{Z-4-4i} \Leftrightarrow f(Z) = \frac{Z - Z_B}{Z - Z_C}$

$Z \neq 4 + 4i \Leftrightarrow Z \neq Z_C \Leftrightarrow M \neq C$

a) $f(Z_D) = \frac{Z_D - Z_B}{Z_D - Z_C} \Leftrightarrow f(Z_D) = \frac{1+5i-2i}{1+5i-4-4i} = \frac{1+3i}{-3+i} \times \frac{-3-i}{-3-i}$

$f(Z_D) = \frac{-3-i-3i+3}{10} \Leftrightarrow \boxed{f(Z_D) = -i}$ $\boxed{0,5}$

$$\begin{cases} \left|\frac{Z_D - Z_B}{Z_D - Z_C}\right| = 1 \\ \text{Arg}\left(\frac{Z_D - Z_B}{Z_D - Z_C}\right) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{DB}{DC} = 1 \Leftrightarrow CA = CB \\ (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

Donc BCD est un triangle rectangle et isocèle en D $\boxed{0,5}$

b) $|f(Z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{Z - Z_B}{Z - Z_C}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{MB}{MC} = 1 \Leftrightarrow MB = MC$

L'ensemble Γ_1 des points M est la médiatrice de $[BC]$. $\boxed{0,25}$

c) $|f(Z) - 1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{Z-2i}{Z-4-4i} - 1\right| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left|\frac{Z-2i-Z+4+4i}{Z-4-4i}\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{4+2i}{Z-4-4i}\right| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \frac{|4+2i|}{|Z-Z_C|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{20}}{|Z-Z_C|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{|Z-Z_C|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{20}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{|Z-Z_C|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |Z - Z_C| = \sqrt{10} \Leftrightarrow CM = \sqrt{10}$.

Donc l'ensemble (Γ_3) des points M est le cercle de centre C et de rayon $\sqrt{10}$. $\boxed{0,25}$

4. a) $z_0 = f(6) = \frac{6-2i}{6-4-4i} = \frac{6-2i}{2-4i} = \frac{3-i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i}$

$= \frac{3+6i-i+2}{5} = \frac{5+5i}{5}$ $\boxed{z_0 = 1 + i}$

$\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + i = z_0$

Donc $\boxed{z_0 = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}}}$ $\boxed{0,5}$

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad Z_n = z_0^{\,n} \quad et \quad M_n(Z_n)$

$|Z_n| \geq 2020 \Leftrightarrow |z_0^{\,n}| \geq 2020 \Leftrightarrow |z_0|^n \geq 2020$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2})^n \geq 2020 \Leftrightarrow ln\left((\sqrt{2})^n\right) \geq ln(2020)$

$\Leftrightarrow n ln(\sqrt{2}) \geq ln(2020) \Leftrightarrow n \geq \frac{ln(2020)}{ln(\sqrt{2})} \Leftrightarrow n \geq 21{,}96$

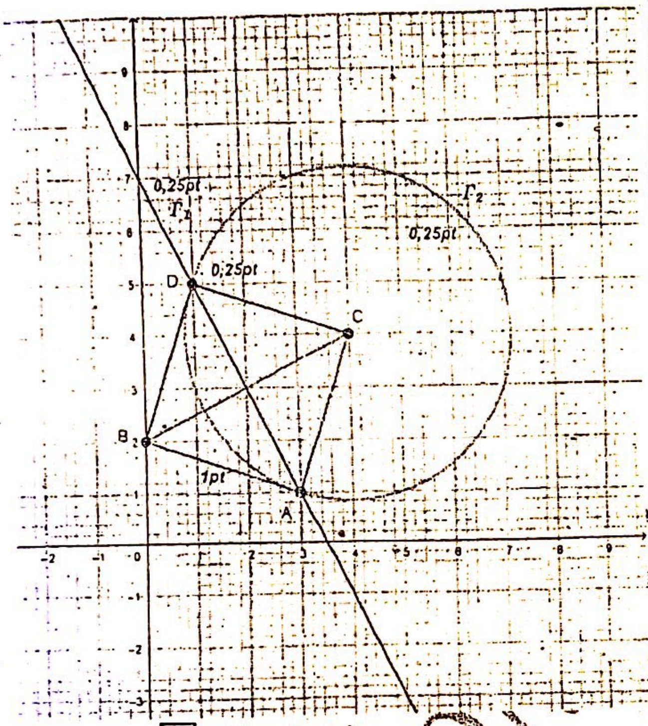
Le plus petit entier naturel est $n_0 = 22$ $\boxed{0{,}25}$

$Arg(Z_{2020}) = Arg(z_0^{\,2020}) = 2020\,Arg(z_0) = 2020\frac{\pi}{4} = 505\pi$

$Arg(Z_{2020}) = \pi[2\pi] \Leftrightarrow Z_{2020} \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow M_{2020} \in (Ox)$

$\boxed{0{,}25}$

Représentation graphique



Exercice $\boxed{3}$ (4points)

$f(x) = x - 2 + e^{-x}$

1. a) $\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty}\left(\underbrace{x-2}_{+\infty} + \underbrace{e^{-x}}_{0}\right) = +\infty$

$\boxed{\lim_{+\infty} f(x) = +\infty}$ $\boxed{0{,}25}$

$\lim_{+\infty}(f(x) - (x-2))$

$= \lim_{+\infty}(x - 2 + e^{-x} - (x-2)) = \lim_{+\infty}(e^{-x}) = 0$

$\boxed{\lim_{+\infty}(f(x) - (x-2)) = 0}$ $\boxed{0{,}25}$

b) *Comme* $\boxed{\lim_{+\infty}(f(x) - (x-2)) = 0}$ *alors la droite* $\Delta: y = x - 2$ *est une A.O à* (C) *au voisinage de* $+\infty$ $\boxed{0{,}25}$

Position relative de C et Δ

On étudie le signe de $(f(x) - y) = e^{-x} > 0$ *Donc C est toujours au dessus de* Δ $\boxed{0{,}5}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x) - y$	+
Position relative de (C) pa rapport à (Δ)	$C/_{\Delta}$

2.a) $f(x) = x - 2 + e^{-x} = x - 2 + \frac{1}{e^x} = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x}$

$\Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x}}$ $\boxed{0{,}25}$

$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x}}{x} = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{xe^x} = \frac{xe^x}{xe^x} - \frac{2e^x}{xe^x} + \frac{1}{xe^x}$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{xe^x}}$ $\boxed{0{,}25}$

b) $\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty}\left(\frac{\overbrace{xe^x}^{0} - \overbrace{2e^x}^{0} + 1}{\underbrace{e^x}_{0^+}}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\boxed{\lim_{-\infty} f(x) = +\infty}$ $\boxed{0{,}25}$

$\lim_{-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{-\infty}\left(1 - \underbrace{\frac{2}{x}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{xe^x}}_{-\infty}\right) = -\infty$

$\boxed{\lim_{-\infty}\frac{f(x)}{x} = -\infty}$ $\boxed{0{,}25}$

Donc (C) admet une B.P de direction (Oy) au voisinage de $-\infty$

$\boxed{0{,}25}$

3. $f'(x) = x - 2 + e^{-x}$

$(e^{-x})' = -e^{-x}$

$f'(x) = 1 - 0 - e^{-x} \Leftrightarrow \boxed{f'(x) = 1 - e^{-x}}$ $\boxed{0{,}25}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

c) le T.V de f $\boxed{0{,}25}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	-1	$\nearrow +\infty$

$f(0) = 0 - 2 + e^0 = -2 + 1 = -1 \Leftrightarrow \boxed{f(0) = -1}$

4.a) *D'après le tableau de variations de f sur l'intervalle* $]-\infty, 0]$ *elle est continue et strictement décroissante de* $]-\infty, 0]$ *vers* $[-1, +\infty[$ *donc elle est bijective.*

Comme $0 \in [-1, +\infty[$ *alors* $\exists!\, \beta \in]-\infty, 0] / f(\beta) = 0$.

Sur l'intervalle $[0, +\infty[$ *f est continue et strictement croissante de* $[0, +\infty[$ *vers* $[-1, +\infty[$ *donc elle est bijective.*

Comme $0 \in [-1, +\infty[$

alors $\exists!\, \alpha \in [0, +\infty[/ f(\alpha) = 0$.

$[1{,}8; 1{,}9] \subset [0, +\infty[$. *Alors f est aussi bijective sur* $[1{,}8; 1{,}9]$.

De plus $f(1{,}8) = -0{,}03 < 0$ *et* $f(1{,}9) = 0{,}04 > 0$

donc $f(1{,}8) \times f(1{,}9) < 0$.

D'après le théorème de la valeur intermédiaire (V.I)

$\exists!\, \alpha \in]1{,}8; 1{,}9[/ f(\alpha) = 0$ $\boxed{0{,}5}$

b) $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} = 2 - \alpha$

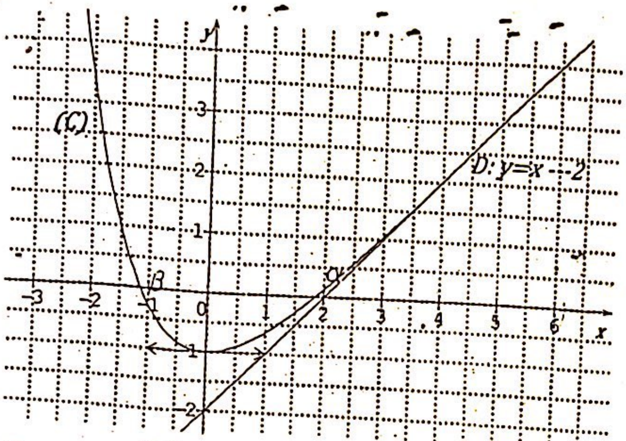
$f(\alpha) = 1 - e^{-\alpha} = 1 - (2 - \alpha) = -1 + \alpha$

$\Leftrightarrow \boxed{f(\alpha) = \alpha - 1}$ $\boxed{0{,}25}$

5. *Représentation graphique* $\boxed{0{,}25}$

$D: y = x - 2$

x	0	2
y	-2	0



Exercice 4 (7 points)

$$\begin{cases} f(x) = x - x\ln x & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1.a) $\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+}\left(\underbrace{x}_{0} - \underbrace{x\ln x}_{0}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{0^+} f(x) = 0 = f(0)}$ $\boxed{0,5}$

Donc f est continue à droite de $x_0 = 0$ $\boxed{0,25}$

b) $\lim_{0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{0^+}\left(\frac{x - x\ln x - 0}{x-0}\right)$

$= \lim_{0^+} \frac{x(1-\ln x)}{x} = \lim_{0^+}\left(1 - \underbrace{\ln x}_{(-\infty)}\right) = +\infty$

$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty}$ $\boxed{0,25}$

Donc f n'est pas dérivable à droite de $x_0 = 0$ *et sa courbe* (Γ) *admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.* $\boxed{0,25}$

c) $\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty}(x - x\ln x)$

$= \lim_{+\infty} \underbrace{x}_{+\infty}\left(\underbrace{1 - \ln x}_{-\infty}\right) = -\infty \Leftrightarrow \boxed{\lim_{+\infty} f(x) = -\infty}$ $\boxed{0,5}$

$$\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty}\frac{x(1-\ln x)}{x} = \lim_{+\infty}\left(1 - \underbrace{\ln x}_{(+\infty)}\right) = -\infty$$

$\boxed{\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x} = -\infty}$ $\boxed{0,25}$

Donc (Γ) *admet une B.P de direction* (Oy) *au voisinage de* $+\infty$ $\boxed{0,25}$

2. $\forall x \in]0,+\infty[$ $f(x) = x - x\ln x$

$(uv)' = u'v + uv'$

$f'(x) = 1 - \ln x - x\frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = 1 - \ln x - 1$

$\Leftrightarrow \boxed{f'(x) = -\ln x}$ $\boxed{0,5}$

$-\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

b) Tableau de variations de f $\boxed{0,5}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

$f(1) = 1 - 1\ln(1) = 1$

3.a) $\Gamma \cap (Ox) \Leftrightarrow f(x) = 0$

Comme $f(0) = 0$ *alors* $x = 0$ *est solution de l'équation* $f(x) = 0$ *d'où* $O(0,0) \in \Gamma \cap (Ox)$

Si $x \neq 0$ *alors* $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(1 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0$

$\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ *donc* $A(e,0) \in \Gamma \cap (Ox)$

D'où $\Gamma \cap (Ox) = \{O, A\}$ $\boxed{1}$

b) Equation de la tangente (T) *à* (Γ) *au point A :*

$T: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$x_0 = e$ $f(e) = 0$

$f'(e) = -\ln(e) = -1 \Leftrightarrow \boxed{f'(e) = -1}$

$T: y = f'(e)(x - e) + f(e) \Leftrightarrow y = -(x - e) + 0$

$\boxed{T: y = -x + e}$ $\boxed{0,5}$

4. $I = [1, +\infty[$

D'après ce T.V f T.V de g est

x	1		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
$g(x)$	1	↘	$-\infty$

D'après ce T.V g est continue et strictement décroissante de $I = [1, +\infty[$ *vers* $J =]-\infty, 1]$ *donc elle est bijective.* $\boxed{0,5}$

b) Calcul de $(g^{-1})'(0)$

On a $g(e) = 0 \Leftrightarrow g^{-1}(0) = e$

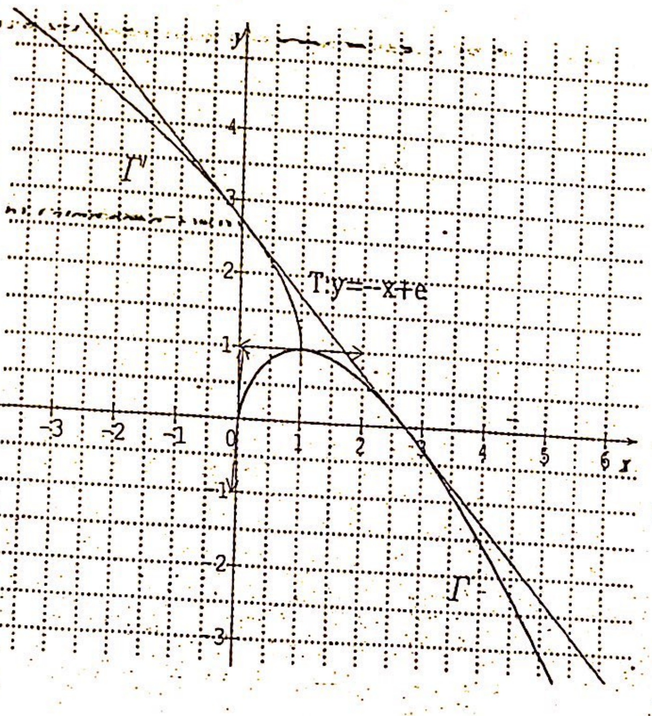
On a aussi $g'(e) = -1$

$(g^{-1})'(x_0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x_0))}$

$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(0))} = \frac{1}{g'(e)} = \frac{1}{-1} = -1$

$\Leftrightarrow \boxed{(g^{-1})'(0) = -1}$ $\boxed{0,5}$

c) Représentation graphique $\boxed{0,5}$



d) $2x - xlnx = m \Leftrightarrow x + x - xlnx = m$

$\Leftrightarrow x - xlnx = -x + m \Leftrightarrow f(x) = -x + m$

Donc le nombre de solution de l'équation paramétrique revient au nombre de points d'intersections de la courbe (Γ) avec la droite T_m: $y = -x + m$ qui est parallèle à T

m	Nombre de solutions	
$m < 0$	1	$\boxed{0,25}$
$0 \leq m < e$	2	
$m = e$	1	
$m > e$	0	

5. a) $A = \int_1^e xlnxdx$

On pose $\begin{cases} u = lnx \\ v' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

$\int_1^e uv' = [uv]_1^e - \int_1^e u'v$

$\int_1^e xlnx\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 lnx\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e \frac{1}{x}x^2 dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 lnx\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 lnx\right]_1^e - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e$

$= \left[\frac{2x^2 lnx - x^2}{4}\right]_1^e = \frac{2e^2 lne - e^2}{4} - \frac{2(1)^2 ln1 - 1^2}{4}$

$A = \frac{2e^2 - e^2}{4} - \frac{0-1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{A = \frac{e^2+1}{4}}$ $\boxed{0,25pt}$

b) $S = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e (x - xlnx)\,dx$

$S = \int_1^e x\,dx - \int_1^e xlnx\,dx \Leftrightarrow S = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e - A$

$S = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}1^2 - \frac{e^2+1}{4} = \frac{2e^2 - 2 - e^2 - 1}{4} = \frac{e^2-3}{4}$

$\boxed{S = \frac{e^2-3}{4} = 1,1}$ $\boxed{0,25pt}$

CETTE PARTIE N'EST PAS DEMANDEE

JUSTIFICATION DE L'EXERCICE $\boxed{1}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n = \frac{n}{n^2+n} = \frac{1}{2n+1}$ et $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$X_n = \frac{1}{U_n}$ et $Y_n = ln(V_n)$

1. $X_n = \frac{1}{U_n} \Leftrightarrow X_n = 2n + 1$

Donc $X_5 = 2 \times 5 + 1 = 11 \Leftrightarrow \boxed{X_5 = 11}$ *Réponse B*

2. $\lim_{+\infty} U_n = \lim_{+\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim_{+\infty} U_n = 0}$ *Réponse A*

3. $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n > 0$

Et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3} < 1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{V_{n+1}}{V_n} < 1}$

Donc (V_n) est décroissante *Réponse B*

4. $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_n = 2n + 1$

$X_{n+1} - X_n = 2(n+1) + 1 - (2n + 1)$

$= 2n + 2 + 1 - 2n - 1 = 2$

$\boxed{X_{n+1} - X_n = 2}$ Donc (X_n) est S.A de raison 2

Réponse A

5. $Y_n = ln(V_n) = ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = nln\left(\frac{1}{3}\right) = -nln3$

Réponse B

$\boxed{Y_n = -nln3}$

6. On pose $S_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

Comme (V_n) est S.G alors

$S_n = V_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{3}\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}$

$\Leftrightarrow \boxed{S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}$ *Réponse B*

FIN