REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
Honneur – Fraternité – Justice

Ministère de l'Education Nationale
Institut Pédagogique National

BAC C - Série Mathématiques

Annale BAC

Mathématiques

2010 - 2020

Préparer et Designer par *PrepaBAC*

BAC 2010
Session Normale

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Enseignement Secondaire et Supérieur
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2010
Session Normale

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (3 points)

1. On considère la fonction numérique f définie sur IR par : $f(x) = e^x - x - 1$.
   a) Dresser le tableau de variation de f. (1)
   b) En déduire que pour tout réel x : $e^x \geq x + 1$. (0,25)

2.a) Montrer que pour tout réel $x > -1$: $\ln(1+x) \leq x$. (0,25)
  b) Montrer que pour tout réel $x < 1$: $\ln(1-x) \leq -x$. (0,25)

3. On considère la suite numérique (S_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par son terme général:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{c'est-à-dire} \quad S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

  a) En utilisant la question 2, montrer que pour tout $n \geq 1$: $S_n \geq \ln(n+1)$. (0,5)
  b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$. (0,25)

4. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $U_n = S_n - \ln n$.
  a) Montrer que pour tout $n > 1$: $U_n - U_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n})$. En déduire le sens de variation de la suite (U_n). (0,25)
  b) En déduire que la suite (U_n) est convergente vers un réel γ, puis vérifier que : $0 < \gamma < 1$. (γ est appelé la constante d'Euler) (0,25)

Exercice 2 (4 points)

Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - (6\cos\theta + i)z^2 + (4 + 5\cos^2\theta + 6i\cos\theta)z - (4 + 5\cos^2\theta)i$ où $\theta \in [0; 2\pi]$.

1.a) Vérifier que $z_0 = i$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$. Déterminer deux nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$. (1)
  b) Déterminer les deux autre solutions z_1 et z_2 de l'équation $P(z) = 0$ sachant que si $\sin\theta \geq 0$, $\operatorname{Im} z_1 \geq 0$. (0,75)

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2. Soit G le centre de gravité du triangle $M_0M_1M_2$.
  a) Démontrer que si θ décrit l'intervalle $[0; 2\pi]$, alors l'affixe du point G est $z_G = 2\cos\theta + \frac{1}{3}i$. (0,5)
  b) Déterminer puis construire le lieu géométrique Γ du point G. (0,25)

3.a) Démontrer que si θ décrit l'intervalle $[0; 2\pi]$, alors le lieu géométrique Γ' des points M_1 et M_2 est une ellipse dont on déterminera une équation cartésienne. (0,5)
  b) Déterminer le centre et les sommets puis calculer l'excentricité de l'ellipse Γ'. Construire Γ' dans le repère précédant. (1)

Exercice 3 (5 points)

1. On considère la fonction u définie sur $]0; +\infty[$ par : $u(x) = x - 2 + \ln x$.
  a) Dresser le tableau de variation de la fonction u. (0,5)
  b) Montrer que u réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intervalle que l'on déterminera. (0,25)
  c) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α puis vérifier que : $1 \leq \alpha \leq 2$. (0,5)
  d) En déduire le signe de $u(x)$ sur $]0; +\infty[$. (0,25)

2. Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{-3}{4}x^2 + x - \frac{1}{2}x^2 \ln x \text{ , } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $1cm$.

a) Démontrer que f est continue à droite de $x_0 = 0$. (0,25)

b) Démontrer que f est dérivable à droite de $x_0 = 0$. Préciser $f'_d(0)$ et interpréter graphiquement. (0,25)

c) Montrer que pour tout réel x strictement positif on a : $f'(x) = xu(\frac{1}{x})$; où u est la fonction définie à la question 1. En déduire le signe de $f'(x)$. (0,5)

d) Dresser le tableau de variation de f. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ une unique solution β et vérifier que : $1 \leq \beta \leq 2$. (0,75)

e) Tracer la courbe (C). (0,75)

3. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose: $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\beta} f(x)dx$

a) Exprimer I_n en fonction de β et de n, (On pourra utiliser une intégration par parties). (0,5)

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et donner une interprétation géométrique de cette limite. (0,5)

Exercice 4 (8 points)

Dans le plan orienté on considère un carré direct $ABCD$ de coté a, $(a > 0)$. Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Le point E est le symétrique de C par rapport à D et F celui de B par rapport à A.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes. (0,5)

2.a) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme D en F et C en E. Préciser son angle et son centre. (1)

b) Déterminer deux droites Δ_1 et Δ_2 telles que $r = s_{\Delta_1} \circ s_{AC}$ et $r = s_{AB} \circ s_{\Delta_2}$. (0,5)

c) Déterminer la nature de la composée $\sigma = s_{AB} \circ s_{AD} \circ s_{AC}$ puis la caractériser. (0,5)

3.a) Prouver qu'il existe une unique similitude s_1 qui transforme D en L et C en D. Préciser son angle et son rapport. (1)

b) Soit R le centre de la similitude s_1. Vérifier que le point R est commun aux cercles de diamètres $[DL]$ et $[CD]$ puis le préciser. Vérifier que R est le point d'intersection des deux droites (CL) et (DI). (0,75)

c) On considère l'homothétie h de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$. Soit $f = h \circ r$. Préciser la nature de f et déterminer $f(D)$ et $f(C)$. Que peut-on remarquer ? (0,75)

d) Donner la forme réduite de la similitude s_1. (0,25)

4. On considère la similitude directe s_2 qui transforme F en B et B en C.

a) Déterminer l'angle et le rapport de s_2. (0,5)

b) Soit Q le centre de s_2. Vérifier que Q est le point d'intersection des deux droites (CL) et (BK). (0,25)

5. Soient les points : P intersection des droites (AJ) et (BK) ; S intersection de (AJ) et (DI).

a) Démontrer que : $Q = bar\{(A,-1);(B,2);(C,1);(D,3)\}$. (0,25)

b) Donner des expressions semblables pour les points P, R et S. (0,5)

c) Démontrer que $PQRS$ est un carré puis calculer son aire en fonction de a. (0,5)

6. Soit Γ l'ensemble des similitudes directes de centre O (centre du carré $ABCD$), et qui transforment $ABCD$ au carré $PQRS$.

a) Prouver que ces similitudes sont de même rapport puis le déterminer. (0,25)

b) Soit g une similitude de l'ensemble Γ dont l'angle $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Donner les valeurs exactes de chacun des nombres $\sin\theta$ et $\cos\theta$. (0,25)

c) Donner en fonction de θ les angles possibles des autres éléments de l'ensemble Γ. (0,25)

Fin.

BAC 2010
Session Compl.

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Enseignement Secondaire et Supérieur
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2010
Session Complémentaire

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Pour tout réel t et pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $G_0(t) = \int_0^t e^x dx$ et $G_n(t) = \int_0^t x^n e^x dx$.

1.a) Démontrer que $G_n(t)$ existe pour tout entier naturel et donner l'expression $G_0(t)$ et de $G_1(t)$ en fonction de t. (1,25)

b) Démontrer que pour tout réel $t \geq 0$ on a : $\frac{1}{2}t^2 \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2 e^t$. (0,5)

c) Démontrer que pour tout réel $t \leq 0$ on a : $\frac{1}{2}t^2 e^t \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2$. (0,5)

d) En déduire le calcul de la limite : $\lim\limits_{t \to 0} \frac{te^t - e^t + 1}{t(e^t - 1)}$. (0,25)

2) Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $I_n = G_n(1) = \int_0^1 x^n e^x dx$.

a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $G_n(t) = t^n e^t - nG_{n-1}(t)$. En déduire I_n en fonction de I_{n-1} pour $n \geq 1$. (0,5)

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive. Que peut on en déduire ? (0,5)

c) Donner un encadrement de I_n qui permet de calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ et calculer cette limite. (0,5)

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout nombre complexe z on pose :
$P(z) = z^3 - (4+6i)z^2 + (-6+16i)z + 12 - 4i$.

1.a) Calculer $P(1+i)$. (0,25)

b) Déterminer deux nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a :
$P(z) = (z-1-i)(z^2 + az + b)$. (0,5)

c) Déterminer les solutions de l'équation $P(z) = 0$. (0,5)

2.a) Placer les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ sachant que $|z_A| \leq |z_B| \leq |z_C|$. Déterminer la nature du triangle ABC. (0,5)

b) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s de centre A qui transforme C en B. (0,25)

c) Donner l'expression complexe de s. Déterminer le rapport et un angle de s. (0,75)

3) On considère la transformation f qui à tout point M d'affixe z associe le M' d'affixe z' tel que :
$z' = \frac{1-i}{2}z + i$. Pour tout entier naturel n on pose : $f^1 = f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$. On définit une suite de points (M_n) par $M_0 = C$ et $M_n = f^n(M_0)$.

a) Reconnaître la transformation f et déterminer ses éléments caractéristiques. (0,5)

b) Déterminer la nature du triangle AM_nM_{n+1}. (0,25)

c) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}$. (0,25)

d) Calculer la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et l'interpréter. (0,25)

Exercice 3 (5 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral direct ABC de coté a, $(a > 0)$. Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [CA].

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (0,5)

2.a) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme I en C et B en J. (0,25)

b) Préciser l'angle et le centre Ω de r_1. (0,5)

3. Soit t la translation de vecteur $\overline{CK}$. On pose : $r_2 = t \circ r_1$.

a) Déterminer la nature de la composée $r_2 = t \circ r_1$. Préciser $r_2(I)$ et $r_2(B)$. Caractériser r_2. (1)

b) Déterminer une droite Δ telle que $s_\Delta \circ r_2 = s_{(AJ)}$. En déduire une autre décomposition de r_2. (0,25)

4. On considère les similitudes directes s_1 et s_2 de centres respectifs A et C telles que : $s_1(B) = K$ et $s_2(K) = B$.

a) Déterminer un angle et le rapport de chacune des similitudes directes s_1 et s_2. (1)

b) Déterminer la nature de la composée $f = s_2 \circ s_1$ et la caractériser. (0,25)

5. Dans cette question, M est un point variable du plan. On pose $r_1(M) = M_1$ et $r_2(M) = M_2$.

a) Démontrer que si M est distinct de J et de Ω alors on a : $(\overline{M\Omega}, \overline{MJ}) = (\overline{MM_1}, \overline{MM_2})\ [2\pi]$. (0,5)

b) En déduire le lieu géométrique du point M lorsque les points M, M_1 et M_2 sont alignés. (0,25)

c) Démontrer que pour toute position du point M dans le plan, la distance M_1M_2 reste constante et la préciser et que la droite (M_1M_2) possède une direction fixe à préciser. (0,5)

Exercice 4 (7 points)

I- On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 2}{x+1}$.

1. Vérifier que pour tout réel $x > -1$ on a : $g(x) > 0$. (0,25)

2. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel $x > -1$ on a : $g(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$. (0,75)

3. Déterminer la primitive G de la fonction g sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ et qui vérifie : $G(0) = 1$. (0,5)

II- On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ par : $f(x) = x^2 + x + 1 + \ln(x+1)$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité $1cm$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Donner une interprétation graphique. (1)

b) Dresser le tableau de variation de f. (0,5)

2.a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $I =]-1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera. (0,25)

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α. Vérifier que $-0,53 < \alpha < -0,52$. (0,5)

3.a) Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $f(x) \geq x + 1$. Interprétation graphique. (0,25)

b) Montrer que les courbes (C) et (C'), représentant respectivement la fonction f et sa réciproque f^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, se coupent en un unique point dont l'abscisse β vérifie $-0,81 < \beta < -0,80$. (0,5)

c) Démontrer que : $(f^{-1})'(\beta) = \dfrac{\beta + 1}{2\beta^2 + 3\beta + 2}$. (0,5)

4.a) Déterminer tous les points de la courbe (C) en lesquels les tangentes sont parallèles à la droite d'équation $y = 2x$. (0,5)

b) Discuter suivant les valeurs du paramètres réel k le nombre de solution de l'équation : $x^2 - x + 1 + \ln(x+1) = k$. (0,5)

c) Construire les courbes (C) et (C'). (0,5)

5. Soit A l'aire du domaine plan limité par les courbes (C) et (C') et les axes des coordonnées.

a) Montrer que : $A = \alpha^2 + \int_\beta^\alpha (2x^2 + 2 + 2\ln(x+1))dx$. (0,25)

b) Calculer A en fonction de α et β (On pourra utiliser une intégration par parties). (0,25)

Fin.

Baccalauréat 2010	Session Complémentaire	Epreuve de Mathématiques	Séries C & TMGM	2/2

BAC 2011
Session Normale

République Islamique de Mauritanie
Ministère d'Etat à l'Education Nationale, à l'Enseignement Supérieur et à la Recherche Scientifique
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2011
Session Normale

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - (1+2\cos\theta)z^2 + (1+2\cos\theta)z - 1$ où $\theta \in [0;2\pi[$.

1) Calculer $P(1)$ puis déterminer les solutions z_0, z_1 et z_2 de l'équation $P(z) = 0$ sachant que z_0 est réel, et $\mathrm{Im}\, z_1 \geq 0$ si $\sin\theta \geq 0$. (1,5)

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ on considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2. Déterminer, lorsque θ décrit l'intervalle $[0;2\pi[$, le lieu géométrique Γ_1 des points M_1 et M_2. (0,5)

3) Soit le point G barycentre du système $S = \{(M_0,1);(M_1,1);(M_2,-3)\}$

a) Démontrer que si θ décrit l'intervalle $[0;2\pi[$, alors le lieu géométrique Γ du point G est une ellipse dont on donnera une équation cartésienne. (0,5)

b) Déterminer, dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, les coordonnées du centre et des sommets, puis calculer l'excentricité de l'ellipse Γ. Construire Γ dans ce repère. (0,5)

4) On suppose dans cette question que $\theta = \frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer les coordonnées des points M_0, M_1, M_2 et G. Placer ces points sur la figure précédente. Quelle est la particularité de G dans ce cas ? (0,5)

b) Déterminer puis construire l'ensemble Γ' des points M du plan tels que : (0,5)

$$MM_0^2 + MM_1^2 - 3MM_2^2 = 6$$

Exercice 2 (4 points)

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = x(1-\ln x); & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1.a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite de $x_0 = 0$, interpréter graphiquement. (0,75)

b) Dresser le tableau de variations de f. (0,75)

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Construire la courbe (C). (0,25)

2) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $\begin{cases} f_n(x) = x^n(1-\ln x); & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans le repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

a) Pour $n \geq 2$, étudier la dérivabilité de f_n à droite de $x_0 = 0$. Interpréter graphiquement. (0,25)

b) Dresser le tableau de variation de f_n. (0,5)

3.a) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par trois points communs que l'on déterminera. (0,5)

b) Etudier la position relative de (C_n) et (C_{n+1}). (0,25)

4) Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $U_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} f_n(x)dx$.

a) Donner une interprétation géométrique de l'intégrale U_n. (0,25)

b) Justifier sans calcul, que la suite (U_n) est positive et décroissante. (0,25)

c) Donner l'expression de U_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. (0,25)

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

1.a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement. (0,75)

b) Vérifier que f est impaire, puis dresser son tableau de variation. (1)

c) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm. (0,25)

d) Calculer l'aire A du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=\ln 3$. (0,25)

2. On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$U_0=\ln 3$, et pour tout entier naturel $n\geq 1$: $U_n=\int_0^{\ln 3}(f(t))^n\,dt$.

a) Calculer U_1. (0,25)

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $0\leq U_n\leq\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\ln 3$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} U_n$. (0,5)

c) Vérifier que pour tout $x\geq 0$ on a : $1-f'(x)=\left(f(x)\right)^2$. Montrer que pour tout $n\geq 0$:

$$U_{n+2}-U_n=\frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}.$$ (0,75)

d) En déduire que pour tout entier naturel $n\geq 1$:

$$\begin{cases} U_{2n}=\ln 3-\sum_{p=1}^{n}\dfrac{1}{2p-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2p-1} \\ U_{2n+1}=\ln\dfrac{5}{3}-\sum_{p=1}^{n}\dfrac{1}{2p}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2p}\end{cases}$$ (0,5)

e) Pour tout entier naturel $n\geq 1$, on pose :

$$S_n=\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3+\ldots+\frac{1}{2n}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n}=\sum_{p=1}^{2n}\frac{1}{p}\left(\frac{4}{5}\right)^p$$

Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$. (0,75)

Exercice 4 (7 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC équilatéral direct de centre G et de côté a, $a>0$.

Soient I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

L'objectif de cet exercice est l'étude de quelques propriétés de la configuration précédente.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (On pourra prendre la droite (AB) horizontale) (0,75)

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme I en A et B en J. (0,5)

c) Déterminer un angle de r_1 et préciser son centre. (0,5)

2) On considère la rotation r_2 de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a) Déterminer $r_2(C)$, $r_2(J)$. (0,5)

b) En déduire l'image de la droite (AC) par r_2 puis la construire. (0,25)

3) Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $k=\dfrac{-1}{2}$. On pose $s=r_1\circ h$.

a) Quelle est l'image du triangle ABC par h ? (0,25)

b) Montrer que s est une similitude directe et donner son rapport et son angle. (0,5)

c) Déterminer $s(A)$. Que peut-on conclure ? (0,25)

d) Donner la forme réduite de s. (0,25)

4) On pose $s^1 = s$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $s^{n+1} = s \circ s^n$.

a) Caractériser s^3. (0,25)

b) Soit $p = 10^{2011}$. Montrer que s^{p-1} est une homothétie de rapport négatif. (0,75)

5) Pour tout point M du plan, on pose : $r_1(M) = M_1$, $r_2(M) = M_2$ et $s(M) = M'$.

a) Déterminer M_1, M_2 dans chacune des positions suivantes de M: M est en I ; en K ; ou en A. (0,75)

b) Montrer que, pour tout M distinct de A, le triangle AMM' est rectangle. (0,25)

c) Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que M, M_1 et M_2 soient alignés. (On pourra considérer les triangles IMM_2, KMM_1 et l'angle $(\overline{MK};\overline{MI})$). (0,5)

6) On suppose dans cette question que M est situé sur le cercle de diamètre $[AC]$, M est distinct du point A. Montrer que :

a) La droite (M_1M_2) passe par un point fixe que l'on déterminera. (0,25)

b) La droite (MM') passe par un point fixe que l'on déterminera. (0,25)

c) L'angle $(\overline{M_1M_2}, \overline{MM'})$ à une mesure constante α modulo π que l'on déterminera. (0,25)

Fin.

Baccalauréat 2011	Session Normale	Epreuve de Mathématiques	Séries C & TMGM	3/3

BAC 2011
Session Compl.

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2011
Session Complémentaire

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose: $P(z) = z^3 - (6-2i)z^2 + (10-8i)z - 4 + 8i$.

1.a) Calculer $P(2)$. (0,5)

b) Résoudre l'équation $P(z) = 0$. (1)

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $|z_A| < |z_B| < |z_C|$. Placer les points A, B et C. Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle et que le quadrilatère OACB est un parallélogramme. (1)

3) Soit s la transformation qui associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = \frac{1+i}{2}z - i$.

a) Justifier que s est une similitude directe du plan. (0,5)

b) Déterminer les éléments caractéristiques de s. (0,5)

c) Vérifier que $s(C) = B$. (0,5)

Exercice 2 (4 points)

1) On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 2$.

a) Dresser le tableau de variations de g. (0,75)

b) Montrer que g réalise une bijection de IR sur IR. (0,5)

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans IR une unique solution α telle que $0,6 \le \alpha \le 0,7$. (0,5)

2) On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{2xe^{-x}}{x^2+2}$.

a) Calculer $f'(x)$, puis vérifier que $f'(x) = \frac{2g(x)e^{-x}}{(x^2+2)^2}$ (0,5)

b) Dresser le tableau de variation de f. (0,75)

c) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 1cm, \|\vec{j}\| = 5cm$. (0,25)

3) On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel $n \ge 1$ par : $U_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$.

On ne cherche pas à calculer l'intégrale U_n

a) Montrer que pour tout entier naturel $n \ge 1$: $0 \le U_n \le (1 - \frac{1}{e})e^{-n}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$. (0,5)

b) Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \ge n_0$, $0 \le U_n \le 10^{-5}$. (0,25)

Exercice 3 (5,5 points)

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de sens direct, de centre O.
Les points E, F, G et H sont les milieux respectifs des segments : [AB], [BC], [CD] et [DA].

1) Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure (on prendra (AB) horizontale)

2) a) Montrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r(D) = H$ et $r(H) = O$. (0,5)

b) Déterminer le centre I et un angle de la rotation r. (0,5)

c) Montrer que $r(A) = F$ puis construire les points B' et C' images respectives de B et de C par r. (0,5) (0,5)

3) Soit h l'homothétie de centre D et de rapport $k=\frac{1}{2}$. On pose $s = r \circ h$.

a) Justifier que s est une similitude directe. Déterminer le rapport et l'angle de s. (0,75)

b) Déterminer l'image du carré $ABCD$ par la similitude s. (0,75)

4) Soit Ω le centre de la similitude s.

a) Montrer que le point Ω appartient aux cercles de diamètres respectifs $[AO]$, $[BG]$, $[CD]$ et $[DH]$. (0,5)

b) On considère les cercles Γ et Γ' passant par Ω et de centres respectifs A et O. Soit T l'intersection de Γ et Γ' autre que Ω. Démontrer que $s(\Gamma)=\Gamma'$. En déduire que les points Ω, A, O et T sont cocycliques. (0,5)

c) Soit M un point de Γ distinct de Ω et de T. On pose $s(M)=M'$. Démontrer que les points M, M' et T sont alignés. (0,5)

d) Soit A' et O' les points diamétralement opposés à Ω respectivement sur les cercles Γ et Γ'.

J et K les milieux respectifs des segments $[MM']$ et $[OO']$.

Déterminer la nature du triangle ΩJK. En déduire le lieu géométrique du point J lorsque M décrit Γ privé de Ω et de T. (0,5)

Exercice 4 (6.5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x+1)$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement. (0,75)

b) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-1,0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$. (0,75)

c) Dresser le tableau de variations de f et construire la courbe (C). (0,5)

2. a) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x\neq -1$, $\frac{x^2}{x+1} = ax+b+\frac{c}{x+1}$. (0,5)

b) À l'aide d'une intégration par parties, calculer, en unités d'aires, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ (0,5)

3) Pour tout entier $n\geq 1$, on pose : $U_n=\int_0^1 x^n\ln(x+1)\,dx$.

a) Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (U_n). (0,5)

b) Calculer U_1 et en donner une interprétation graphique. (0,5)

c) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. La suite (U_n) converge-t-elle ? Justifier. (0,5)

d) Démontrer que pour tout entier $n\geq 1$, $0\leq U_n\leq\frac{\ln 2}{n+1}$. En déduire la limite de la suite (U_n). (0,5)

4) Pour tout entier $n\geq 1$, on pose : $V_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+1}dx$

a) Vérifier que : $U_n=\frac{\ln 2}{n+1}-\frac{1}{n+1}V_n$. (0,5)

b) Démontrer que : $\frac{1}{2(n+2)}\leq V_n\leq\frac{1}{n+2}$. En déduire la limite de la suite (V_n). (0,5)

c) Démontrer que pour tout entier $n\geq 1$, $V_n=(-1)^n(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{(-1)^n}{n+1}-\ln 2)$. (0,5)

En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{(-1)^n}{n+1})=\ln 2$.

Fin.

BAC 2012
Session Normale

République Islamique de Mauritanie
Ministère d'Etat à l'Education Nationale, à l'Enseignement Supérieur et à la Recherche Scientifique
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2012
Session Normale

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (3 points)

Soit la fonction $\mathbf{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{x}\ln(e^{x}+1)$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty\ .$$ (0,75 pt)

2.a) Dresser le tableau de variation de f. (0,75 pt)

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera. (0,25 pt)

c) Tracer la courbe (C). (0,25 pt)

3. On pose $I=\int_0^1 f(x)dx$. On se propose de calculer I par deux méthodes.

Méthode a : Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel x :

$$f'(x)=f(x)+ae^{x}+b+\frac{ce^{-x}}{1+e^{-x}}.$$ En déduire I. (0,5 pt)

Méthode b : En posant $t=e^{x}+1$, utiliser une intégration par parties pour calculer I. (0,5 pt)

Exercice 2 (3 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(2;1;3)$, $B(3;2;1)$, $C(4;1;4)$, $D(5;3;-2)$ et $E(6;-2;-4)$.

1.a) Calculer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DE}$. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est normal au plan (ABC) (1 pt)

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC). (0, 25 pt)

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DE). (0, 5 pt)

d) Déterminer les coordonnées du point F projeté orthogonal de D sur le plan (ABC). Déterminer un réel k tel que $\overrightarrow{EF}=k\overrightarrow{DF}$ (0,5 pt)

2.a) Calculer le volume V du tétraèdre $ABCD$. (On rappelle que $V=\frac{1}{3}\text{Base}\times\text{Hauteur}$). (0,25 pt)

b) Déterminer les deux ensembles Γ_1 et Γ_2 des points M de l'espace définis par :

$$M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow 11MD^2-ME^2=-30$$ (0,25 pt)

$$M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow MD^2-ME^2=-36\ .$$ (0,25 pt)

Exercice 3 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation E_θ : $z^2-(6\cos\theta)z+4+5\cos^2\theta=0$, $\theta\in[0,2\pi[$.

1.a) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation E_θ. On note z_1, z_2 les solutions de E_θ avec $\text{Im}(z_1)\geq 0$ si $\theta\in[0,\pi[$ (1 pt)

b) Préciser les valeurs de θ et les solutions de E_θ dans les cas suivants :

- L'équation E_θ admet des solutions doubles. Dans ce cas on note A_1 et A_2 les points d'affixes respectives z_1, z_2 avec $Re(z_1) \geq 0$. **(0,25 pt)**

- L'équation E_θ admet deux solutions imaginaires pures. Dans ce cas on note B_1 et B_2 les points d'affixes respectives z_1, z_2 avec $Im(z_1) \geq 0$. **(0,25 pt)**

2. Dans le cas général on note M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1, z_2.

a) Déterminer le lieu géométrique Γ des points M_1 et M_2 lorsque θ décrit $\theta \in [0, 2\pi[$. **(1 pt)**

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble Γ et le construire. **(0,5 pt)**

3. On définit l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', barycentre du système $\{(A_1,-4);(B_1,2);(M,3)\}$.

a) Ecrire z' en fonction de z puis reconnaitre f et donner ses éléments caractéristiques. **(0, 5 pt)**

b) Donner une équation cartésienne de $\Gamma' = f(\Gamma)$. Donner les éléments caractéristiques de Γ' dans $(O;\vec{u},\vec{v})$. **(0, 5 pt)**

Exercice 4 (4 points)

On se propose dans cet exercice de calculer la limite de la suite numérique de terme général $U_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, $n \geq 2$.

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln x$.

1. Dresser le tableau de variation de f. **(1 pt)**

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$; on pose $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)dx$.

a) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_\lambda^1 \ln x dx$. **(0,5 pt)**

b) En déduire le calcul de $I(\lambda)$ puis $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} I(\lambda)$. **(0,5 pt)**

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$ on pose : $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\dfrac{k}{n})$.

a) Montrer que : $\dfrac{1}{n}f(\dfrac{k+1}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \dfrac{1}{n}f(\dfrac{k}{n})$; pour $1 \leq k \leq n-1$. **(0,25 pt)**

b) En déduire que : $S_n - \dfrac{1}{n}f(\dfrac{1}{n}) \leq I(\dfrac{1}{n}) \leq S_n$ puis que : $I(\dfrac{1}{n}) \leq S_n \leq I(\dfrac{1}{n}) + \dfrac{1}{n}f(\dfrac{1}{n})$. **(0,5 pt)**

c) En utilisant 3.b) montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{3}{2}$. **(0,25 pt)**

4.a) Montrer que : $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k}{n}\right) = \ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)$ et que $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$. **(0,5 pt)**

b) En déduire que : $S_n = \dfrac{n^2+n}{2n^2} - \ln U_n$. **(0,25 pt)**

c) Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$. **(0,25 pt)**

Exercice 5 (6 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral direct $\mathbf{ABC}$ de coté $\mathbf{a}$,$(\mathbf{a} > \mathbf{0})$, de centre $\mathbf{G}$. Soient $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ les milieux respectifs des segments $[\mathbf{BC}]$, $[\mathbf{CA}]$ et $[\mathbf{AB}]$. Le point $\mathbf{E}$ est le symétrique de $\mathbf{K}$ par rapport à $\mathbf{I}$.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. **(0,5 pt)**

2.a) Montrer qu'il existe une unique rotation $\mathbf{r_1}$ qui transforme $\mathbf{B}$ en $\mathbf{I}$ et $\mathbf{J}$ en $\mathbf{A}$. **(0,5 pt)**

b) Déterminer les éléments caractéristiques de $\mathbf{r_1}$. **(0,5 pt)**

3. Soit $\mathbf{t}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AJ}}$. On pose : $\mathbf{r_2} = \mathbf{t} \circ \mathbf{r_1}$ et $\mathbf{f} = \mathbf{s_{JC}} \circ \mathbf{s_{JE}} \circ \mathbf{s_{KE}}$.

a) Déterminer $\mathbf{r_2(J)}$ et caractériser $\mathbf{r_2}$. **(0,5 pt)**

b) Déterminer deux droites Δ_1 et Δ_2 telles que $\mathbf{r_1} = \mathbf{s_{KC}} \circ \mathbf{s_{\Delta_1}}$ et $\mathbf{r_2} = \mathbf{s_{JC}} \circ \mathbf{s_{\Delta_2}}$. En déduire que $\mathbf{f} = \mathbf{t}_{\overrightarrow{AJ}} \circ \mathbf{s_{KC}}$ **(0,5 pt)**

c) Déterminer l'image du triangle $\mathbf{BIK}$ par $\mathbf{f}$. Justifier que $\mathbf{f}$ est une symétrie glissante et donner sa forme réduite. **(0,5 pt)**

4.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe $\mathbf{s}$ qui transforme $\mathbf{E}$ en $\mathbf{I}$ et $\mathbf{C}$ en $\mathbf{G}$. **(0,5 pt)**

b) Déterminer un angle et le rapport de $\mathbf{s}$. **(0,5 pt)**

c) Montrer que le centre de $\mathbf{s}$ est situé sur les cercles circonscrits aux triangles $\mathbf{BCG}$ et $\mathbf{BEI}$. Préciser ce centre. **(0, 25 pt)**

5. Dans cette question, $\mathbf{M}$ est un point variable du cercle Γ de diamètre $[\mathbf{BC}]$.

On note $\mathbf{s(M) = M'}$.

a) Déterminer le lieu géométrique Γ' du point $\mathbf{M'}$ lorsque $\mathbf{M}$ décrit Γ. **(0, 25 pt)**

b) Montrer que pour tout point $\mathbf{M}$ de Γ distinct de $\mathbf{B}$, la droite $\mathbf{(MM')}$ passe par le point $\mathbf{K}$. **(0, 25 pt)**

c) En déduire un programme de construction de $\mathbf{M'}$ à partir d'une position de $\mathbf{M}$ sur Γ. Placer $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M'}$ en supposant que les points $\mathbf{B}, \mathbf{M}$ et $\mathbf{C}$ se succèdent dans le sens trigonométrique sur Γ. **(0, 25 pt)**

6) Pour tout entier naturel $\mathbf{n \geq 2}$, on pose : $\mathbf{s^2 = s \circ s}$ et $\mathbf{s^n = s \circ s^{n-1}}$. On définit une suite de points $(\mathbf{M_n})$ par $\mathbf{M_0 = E}$; $\mathbf{M_1 = s(M_0)}$ et $\mathbf{M_n = s^n(M_0)}$.

a) Sur une nouvelle figure, placer les points $\mathbf{B, M_0, M_1, M_2, M_3}$ (Pour la construction, on pourra prendre la droite $\mathbf{(BE)}$ verticalement avec $\mathbf{BE = 6cm}$). **(0, 25 pt)**

b) Calculer en fonction de $\mathbf{n}$ et $\mathbf{a}$ la somme : $\mathbf{S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}}$. **(0, 25 pt)**

c) Calculer la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{S_n}$ et l'interpréter. **(0, 25 pt)**

d) Justifier que : $\mathbf{M_{1960} \in (BM_4)}$ et $\mathbf{M_{2012} \in (BG)}$. **(0, 25 pt)**

Fin.

BAC 2012
Session Compl.

Baccalauréat 2012

Session Complémentaire

رمضان 1433 هـ

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Pour tout nombre complexe z , on pose : $P(z)=z^3-(4-2i)z^2+(4-6i)z-4+8i$.

a) Calculer $P(-2i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z)=(z+2i)(z^2+az+b)$$ (0,75 pt

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$. (0,75 pt

2. Soient A, B et C les images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $|z_A|<|z_B|<|z_C|$.

a) Placer les points A, B et C. (0,5 pt)

b) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(O;3),(A;-4),(B;1),(C;2)\}$. Vérifier que A est le barycentre du système $\{(O;5),(B;-5),(G;2)\}$. (0,5 pt)

c) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que le nombre $\dfrac{z-1-i}{z+2i}$ soit imaginaire pur. (0,5 pt)

3. Pour tout point M du plan on pose : $\varphi(M)=3MO^2-4MA^2+MB^2+2MC^2$ et on note Γ_k l'ensemble des points M tels que $\varphi(M)=k$, où k est un réel.

a) Discuter suivant les valeurs de k, la nature de Γ_k. (0,5 pt)

b) Déterminer et construire Γ_{16}. (0,5 pt)

Exercice 2 (4 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ par: $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Calculer et interpréter graphiquement : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. (1 pt)

b) Dresser le tableau de variation de f. (1 pt)

c) Construire la courbe (C). (0,5 pt)

2. Pour tout entier naturel $n\geq2$, on pose :

$$U_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}-\ln(\ln n)=\frac{1}{2\ln2}+\frac{1}{3\ln3}+\dots+\frac{1}{n\ln n}-\ln(\ln n).$$

a) Montrer que tout entier naturel $n\geq2$, $\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\leq\displaystyle\int_n^{n+1}f(t)dt\leq\frac{1}{n\ln n}$ (0,5 pt)

b) Montrer que pour tout entier naturel $n\geq2$, $U_{n+1}-U_n=\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\displaystyle\int_n^{n+1}f(t)dt$. En déduire le sens de variation de (U_n). (0,5 pt)

c) Montrer que tout entier naturel $n\geq2$, $U_{n+1}-U_n\geq f(n+1)-f(n)$. En déduire que $U_n\geq-\ln(\ln2)$. (0,25 pt)

d) Déduire de ce qui précède que la suite (U_n) est convergente vers une limite ℓ telle que $-\ln(\ln2)\leq\ell\leq\dfrac{1}{2\ln2}-\ln(\ln2)$. (0,25 pt)

Exercice 3 (6 points)

Soit $\mathbf{f}$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par: $\mathbf{f(x)} = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{e^x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement. (1 pt)

b) Montrer que la courbe (C) de f admet trois tangentes horizontales dont l'une est au point d'abscisse 1. (1 pt)

2.a) Dresser le tableau de variation de f. (0,5 pt)

b) Construire la courbe (C). (0,5 pt)

3. Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

a) Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (I_n). (0,5 pt)

b) Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante. Que peut-on en conclure ? (0,5 pt)

c) Donner un encadrement du nombre I_n qui permet de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. Calculer cette limite. (0,5 pt)

4.a) Calculer I_0. (0,5 pt)

b) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout n : $I_{n+1} = \dfrac{-1}{e} + (n+1)I_n$. (0,5 pt)

c) Calculer l'aire sous la courbe (C) délimitée par l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. (0,5 pt)

Exercice 4 (6 points)

Dans le plan orienté on considère un carré direct $ABCD$ de coté a, $(a > 0)$.
Soient E et F les symétriques respectifs des points C et B par rapport à (AD). Soit G le point tel que le triangle DBG soit équilatéral direct. Soient I et J les milieux respectifs des segments $[DB]$ et $[DF]$.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (1 pt)

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme D en G et F en B. Préciser l'angle et le centre de r_1. (1 pt)

c) Soit la rotation r_2 qui transforme G en E et B en A. Préciser l'angle et le centre de r_2. (0,5 pt)

d) On pose $r = r_2 \circ r_1$. Déterminer $r(D)$ et $r(F)$. Caractériser r. (0,75 pt

2. On considère l'homothétie h de centre B et de rapport $k = \dfrac{1}{2}$. On note $s = h \circ r$.

a) Montrer que s est une similitude directe. Préciser le rapport et un angle de s. (0,75 pt

b) Soit Ω le centre de s. Montrer que Ω appartient à deux cercles Γ_1 et Γ_2 que l'on déterminera. (0,75 pt

c) Déterminer deux réels α et β tels que Ω soit le barycentre du système $\{(E,\alpha);(I,\beta)\}$. Placer Ω sur la figure. (0,25 pt

3. On considère l'ensemble Γ des points M du plan tels que $MA + ME = 2a$ où a est la longueur du coté du carré $ABCD$.

a) Montrer que Γ est une ellipse passant par D. (0,5 pt)

b) Préciser les sommets, les longueurs des axes de Γ et calculer son excentricité e. (0,25 pt

c) Déterminer $\Gamma' = s(\Gamma)$ puis construire Γ et Γ'. (0,25 pt

Fin.

BAC 2013
Session Normale

République Islamique de Mauritanie
Ministère d'Etat à l'Education Nationale, à l'Enseignement Supérieur et à la Recherche Scientifique
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2013
Session Normale

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (3 points)

On considère l'équation (E) : $25x-9y=5$, où x et y sont des entiers relatifs.

1.a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $25u+9v=1$. En déduire une solution particulière $(x_0;y_0)$ de (E). (1 pt)

b). Déterminer l'ensemble des solutions de (E). (0,75 pt)

2) On désigne par d le PGCD de x et y où (x,y) est une solution particulière de (E).

a) Quelles sont les valeurs possibles de d ? (0,5 pt)

b) Quelles sont les solutions (x,y) de (E) telles que x et y soient premiers entre eux? (0,5 pt)

c) Peut-on trouver un couple (x,y) d'entiers relatifs tel que $(x^2;y^2)$ soit solution de (E) ? Justifier votre réponse. (0,25 pt)

Exercice 2 (3,5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(9-i)z^2+(28-5i)z-32+4i$.

1.a) Calculer P(4) et déterminer deux nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=(z-4)(z^2+az+b)$ (1 pt)

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$. (0, 5 pt)

2) On considère les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z)=0$ tels que $z_A=4$, $\operatorname{Im} z_B>0$ et $\operatorname{Im} z_C<0$.

a) Donner l'expression complexe de la similitude directe s de centre C qui transforme A en B. (0,5 pt)

b) Déterminer le rapport et un angle de s. (0,5 pt)

3) Pour tout nombre complexe z on pose : $Q(z)=z^2-(5-i)z+8-i$.

On note Γ l'ensemble des points M d'affixe z tels que Q(z) soit imaginaire pur (ou nul).

a) En posant $z=x+iy$, donner une équation cartésienne de Γ et montrer que Γ est une hyperbole de centre $\Omega(\frac{5}{2};-\frac{1}{2})$. (0, 5 pt)

b) Préciser les sommets et les asymptotes de Γ puis la construire. (0,5 pt)

Exercice 3 (4 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(3-x)e^x$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$. (0, 5 pt)

b) Dresser le tableau de variation de f. (0, 5 pt)

c) Tracer la courbe (C). (0,25 pt)

d) Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y'-y=-e^x$ et calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=3$. (0, 5 pt)

196

2) On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$U_n = \dfrac{3^n}{n!}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $0 \leq \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq \dfrac{3}{4}$. (0,5 pt)

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $0 \leq U_n \leq \dfrac{9}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$. (0, 5 pt)

3) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $I_n = \dfrac{1}{n!}\int_0^3 (3-x)^n e^x dx$ et

$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{3^k}{k!} = 1 + 3 + \dfrac{3^2}{2!} + \dfrac{3^3}{3!} + \dots + \dfrac{3^n}{n!}$.

a) Justifier que $I_1 = e^3 - 4$ (0,25 pt)

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 \leq I_n \leq (e^3 - 1)U_n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$. (0,5 pt)

c) En utilisant une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = I_n - U_{n+1}$. (0,25 pt)

d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$e^3 = 1 + 3 + \dfrac{3^2}{2!} + \dfrac{3^3}{3!} + \dots + \dfrac{3^n}{n!} + I_n$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = e^3$. (0,25 pt)

Exercice 4 (4,5 points)

1) On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\begin{cases} g(x) = 1 + x^3 - 3x^3 \ln x & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

a) Montrer que g est continue en 0^+ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$. (0,5 pt)

b) Dresser le tableau de variation de g. (0,5 pt)

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0, +\infty[$. (0,5 pt)

2) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + x^3}$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. (0,5 pt)

b) Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(1+x^3)^2}$. En déduire le tableau de variation de f. (0,5 pt)

3) Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on pose $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $[1, +\infty[$. Calculer $F'(x)$ et déterminer le sens de variations de F. (0, 5 pt)

b) Vérifier que pour tout t de $[1, +\infty[$, on a : $\dfrac{\ln t}{(1+t)^3} \leq f(t) \leq \dfrac{\ln t}{t^3}$ (0,25 pt)

197

12015

c) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_1^x \frac{\ln t}{t^3}dt$. (0,25 pt)

d) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $t > 0$; (0,25 pt)

$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1+t)^2}.$$

4.a) En utilisant les résultats précédents, déduire que pour tout $x \in]1,+\infty[$:

$$\frac{-\ln x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1-2\ln 2}{4} \leq F(x) \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} - \frac{\ln x}{2x^2}$$ (0,25 pt)

b) On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \ell$. Montrer que : $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{4}$. (0,25 pt)

c) Tracer l'allure générale de la courbe de F. (0,25 pt)

Exercice 5 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère le carré direct ABCD de centre O et de coté a $(a > 0)$. I, J, K et L les milieux respectifs des cotés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (0,75 pt)

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme C en O et K en I. (0,5 pt)

c) Déterminer un angle et le centre de cette rotation. (0,5 pt)

2) Soit $f = S_{IJ} \circ S_{JO} \circ S_{OK}$.

a) Vérifier que $f = r \circ S_{OK}$ et déterminer $f(D)$, $f(K)$ et $f(O)$. (0, 5 pt)

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f et donner sa forme réduite. (0,5 pt)

3.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s_1 qui transforme B en I et L en A puis déterminer le rapport λ_1 de s_1. (0,5 pt)

b) Soit α une mesure de l'angle de s_1. Montrer que $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. (0, 25 pt)

c) Soit P le centre de s_1. E le cymétrique de C par rapport à B. Montrer que le point P est situé sur les cercles circonscrits aux triangles BEI et BAL. Préciser P et le placer sur la figure. (0, 25 pt)

d) Montrer que $(\overrightarrow{PI}, \overrightarrow{PA}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. En déduire que les points A, P et E sont alignés. (0, 25 pt)

4) Soit s_2 la similitude directe de centre B qui transforme C en L. On note Q le centre de s_2 et β une mesure de son angle. Soit $g = s_1 \circ s_2$. (0, 25 pt)

a) Justifier que g est une similitude directe et déterminer $g(B)$ et $g(C)$. (0, 25 pt)

b) Montrer que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. En déduire que le centre Q de g est situé sur deux cercles que l'on déterminera. Placer Q sur la figure. (0, 25 pt)

c) Justifier que $g(O) = P$. En déduire la construction de l'image du carré ABCD par g. (0, 25 pt)

Fin.

198

BAC 2013
Session Compl.

République Islamique de Mauritanie
Ministère d'Etat à l'Education Nationale, à l'Enseignement Supérieur et à la Recherche Scientifique
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2013
Session complémentaire

رمضان 1434 هـ

Séries : C & TMGM
Epreuve : Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (3 points)

Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^3 + 2(n+2)x + 1$.

Le paramètre n est un entier naturel.

Soit C_n la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{v})$.

1.a) Dresser le tableau de variation de la fonction $f_0(x) = x^3 + 4x + 1$. (0,75 pt)

b) Montrer que l'équation $f_0(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique U_0 et que $U_0 \in]-1,0[$. (0, 5 pt)

c) Tracer C_0. (0,25 pt)

2.a) Montrer que toutes les courbes C_n passent par un point fixe A que l'on déterminera. (0, 5 pt)

b) Etudier les positions relatives des courbes C_n et C_{n+1}. (0, 5 pt)

3.a) Prouver que pour tout entier naturel, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution U_n et que $U_n \in]-1,0[$ (0,25 pt)

b) On considère la suite de terme général U_n.

Montrer que la suite (U_n) est croissante. En déduire qu'elle est convergente. (0,25 pt)

Exercice 2 (4 points)

Pour tout z de $\mathbb{C}$ on pose: $P(z) = z^3 - (4+6i)z^2 + (-5+18i)z + 18 - 12i$

1.a) Calculer P(2) et P(3i). (1 pt)

b) En déduire les nombres complexes z_1, z_2, z_3 solutions de l'équation $P(z) = 0$ tels que $|z_1| \leq |z_2| \leq |z_3|$. (1 pt)

2) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A,B et C d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et le point G barycentre du système $\{(A,1),(B,-3),(C,4)\}$.

Pour tout point M du plan on pose:

$\varphi_1(M) = MA^2 - 3MB^2 + 4MC^2$ et $\varphi_2(M) = 4MA^2 - 2MB^2 - 2MC^2$

a) Vérifier que l'affixe du point G est $z_G = 5 + \frac{3}{2}i$. (0,5 pt)

b) Donner une forme réduite de $\varphi_1(M)$ et de $\varphi_2(M)$. (0,5 pt)

c) Déterminer et construire les ensembles Γ_1 et Γ_2 des points M du plan tels que : (0, 5 pt)

$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \varphi_1(M) = -3$ ⟹ man... m 3 ... (0,5 pt)

$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \varphi_2(M) = 44$.

X

205

Exercice 3 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2\ln x}{x^2-\ln x}; x>0 \\ f(0)=-2 \end{cases}$.

1a) Montrer que f est continue en 0^+.

b) Étudier la dérivabilité de f en zéro à droite et interpréter graphiquement. (0, 5 pt)

c) Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et interpréter graphiquement. (0, 5 pt)

(0, 5 pt)

2a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Donner l'équation de la tangente à C au point d'abscisse 1. (0, 5 pt)

c) Tracer la courbe de f. (0, 5 pt)

3) On considère la fonction g définie par : $g(t)=tf(t)$. (0, 25 pt)

Pour tout $x\in[1,+\infty[$, on pose $F(x)=\int_1^x g(t)dt=\int_1^x tf(t)dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $[1,+\infty[$. Calculer $F'(x)$ et montrer que F est croissante.

b) Vérifier que pour tout t de $[1,+\infty[$, on a : $g(t)\geq\dfrac{2\ln t}{t}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. (0, 5 pt)

c) Dresser le tableau de variation de F. (0, 5 pt)

(0,25 pt)

Exercice 4 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un losange direct ABCD de centre O et de coté a $(a>0)$. telque $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$. On considère les deux points E et F tels que OEFD soit un carré direct.

1) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure (On pourra prendre (AC) horizontale).

2a) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en B et D en A. (0,5 pt)

b) Préciser un angle et le centre de cette rotation. (0,5 pt)

3a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme B en D et D en F. (0,5 pt)

b) Déterminer le rapport et un angle de s. (0, 5 pt)

c) Soit H le projeté orthogonal de D sur (BF). Déterminer les images des droites (BH) et (DH) par s. En déduire que H est le centre de s. (0,5 pt)

d) Préciser et placer sur la figure les images des sommets du carré OEFD par la similitude s. (0, 5 pt)

4) On muni le plan d'un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD})$. (0,5 pt)

a) Déterminer les coordonnées des points E ;D ;B et F dans ce repère.

b) Donner l'expression complexe de la similitude s. (0, 75 pt)

c) En utilisant 3_a) retrouver le rapport et l'angle de s, et calculer les coordonnées de H dans le repère précédent. (0, 25 pt)

(0,5 pt)

Exercice 5 (4 points)

Soit f la fonction de variable réelle x définie par : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1a) Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x)=-1+\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ et $f(x)=1-\dfrac{2}{e^x+1}$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement. (0, 5 pt)

206

(0, 5 pt)

(0, 25 pt)

2.a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer C dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (0, 25 pt)

c) Soit a un réel strictement supérieur à 1. Calculer en fonction de a, l'aire du domaine plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln a$. (0, 25 pt)

3) Pour tout entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_0^{\ln a} (f(t))^n dt$

a) Vérifier que $I_1 = 2\ln\left(\frac{a+1}{2\sqrt{a}}\right)$. (0, 25 pt)

b) Vérifier que pour tout réel x: $f^2(x) = 1 - 2f'(x)$. En déduire la valeur de I_2 (0,5 pt)

c) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq I_n \leq \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n \ln a$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. (0,5 pt)

d) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $I_n - I_{n+2} = \frac{2}{n+1}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{n+1}$. (0,2 5 pt)

4) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $S_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k$.

a) Ecrire $S_n(a)$ en fonction de certains termes de la suite (I_n). En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(a)$. (0,5 pt)

b) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose :

$$T_n = \frac{9}{11} + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{11}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{11}\right)^3 + ... + \frac{1}{n}\left(\frac{9}{11}\right)^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{9}{11}\right)^k$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$. (0,25 pt)

Fin.

207

BAC 2014
Session Normale

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Baccalauréat 2014

Session Normale

Honneur – Fraternité – Justice

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3+(1-2i)z^2+(1-2i)z-2i$.

1) Calculer $P(2i)$ est déterminer les solutions z_0, z_1 et z_2 de l'équation $P(z)=0$ sachant que $\operatorname{Im} z_0 \geq \operatorname{Im} z_1 \geq \operatorname{Im} z_2$. (1,5 pt)

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2. On pose $z'=f(z)=\dfrac{1}{z^2+z+1}$. On note M et M' les points d'affixes respectives z et z'.

a) Vérifier qu'une équation cartésienne de la droite (BC) est $2x+1=0$ (0, 5 pt)

b) Démontrer que si M décrit la droite (BC) privée de B et C, alors M' est situé sur l'axe des abscisses (On pourra remarquer que $z^2+z+1=\left(z+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$). (0,25 pt)

3.a) Démontrer que si $|z|=1$, alors $f(z)=\dfrac{\bar{z}}{1+z+\bar{z}}$. (0,25 pt)

b) Vérifier que si $z=e^{i\theta}$ avec $\theta\in[-\pi;\pi]\setminus\left\{\dfrac{-2\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right\}$, alors $f(z)=\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$. (0,25 pt)

4.a) Démontrer que si M décrit le cercle d'unité privé de A et C, alors M' est situé sur la courbe Γ d'équation cartésienne $x^2+y^2=(2x-1)^2$ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$. (0,5 pt)

b) Démontrer que Γ est une hyperbole. Déterminer le centre et les sommets puis calculer l'excentricité de Γ. Construire Γ dans le repère précédent. (0,75 pt)

Exercice 2 (5 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^x$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Dresser le tableau de variation de f. (1,5 pt)

b) Tracer la courbe (C). (0,5 pt)

c) Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y''-2y'+y=0$. (0,5 pt)

d) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$. (0,5 pt)

2) On considère la suite numérique (I_n) définie pour tout entier naturel $n\geq 1$ par $I_n=(-1)^n\int_0^1 x^n e^x dx$.

a) Montrer que $I_1=-1$ (0,5 pt)

b) Montrer que pour tout entier naturel $n\geq 1$, $\dfrac{1}{n+1}\leq |I_n|\leq \dfrac{e}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. (0,5 pt)

c) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n\geq 1$:

$$I_{n+1}=(-1)^{n+1}e+(n+1)I_n.$$

(0,5 pt)

d) En déduire le calcul de l'intégrale $J=\int_0^1 \dfrac{(x^3+4x^2-3x-6)e^x}{x+1}dx$. Donner la valeur de J sous la forme $ae+b$ où a et b sont des entiers relatifs. (0,5 pt)

Exercice 3 (5 points)

1) On considère la fonction numérique f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right), & x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

208

a) Montrer que f est continue à droite de zéro (On pourra écrire $f(x)=x\ln(x+1)-x\ln x$). (0,5 pt)

b) Etudier la dérivabilité de f à droite de zéro. Donner une interprétation graphique. (0,5 pt)

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ (On pourra poser $t=\frac{1}{x}$). Interpréter graphiquement. (0, 5 pt)

2.a) Vérifier que $f''(x)=\frac{-1}{x(x+1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$. (0, 5 pt)

b) Dresser le tableau de variation de f. (0, 5 pt)

c) Construire la courbe de f. (0, 5 pt)

3) Pour tout entier naturel $n\geq 1$; on pose: $\begin{cases} f_n(x)=x^n\ln\left(1+\frac{1}{x}\right), & x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$ et $A_n=\int_0^1 f_n(x)dx$.

a) Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (A_n). (0,25 pt)

b) Montrer que pour tout $x\in[0,1]$, on a $0\leq x^{n-1}f(x)\leq x^{n-1}$ où f est la fonction définie dans la question 1). (0,25 pt)

c) Justifier que $0\leq A_n\leq\frac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$. (0,5 pt)

4) On pose $I_n(\alpha)=\int_\alpha^1 x^n\ln x dx$, $I_n=\lim\limits_{\alpha\to0^+} I_n(\alpha)$ et $J_n=\int_0^1 x^n\ln(x+1)dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_n(\alpha)$ en fonction de α et de n. (0, 5 pt)

b) Montrer que $\lim\limits_{\alpha\to0^+} I_n(\alpha)=\frac{-1}{(n+1)^2}$. (0,25 pt)

c) En utilisant une intégration par parties, montrer que $J_{n+1}=\frac{2\ln 2}{n+2}-\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{n+1}{n+2}J_n$. (0,25 pt)

Exercice 4 (6 points) *(Les deux parties de l'exercice peuvent être traitées indépendamment).*

Partie A

Dans le plan orienté on considère un carré direct ABCD de centre O et de côté a, $(a>0)$. Soient K et L les milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[DA]$.

1) Faire une figure illustrant les données précédentes. (0,5 pt)

2) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en B et K en L. Préciser le centre et un angle de r. (1 pt)

3.a) Prouver qu'il existe une unique similitude directe f_1 qui transforme D en L et B en O. Déterminer le rapport et un angle de f_1. (0,75 pt)

b) Soit P le centre de la similitude f_1. Vérifier que le point P est commun aux cercles de diamètres $[AB]$ et $[OD]$ puis le préciser. Vérifier que P est aussi le point d'intersection des deux droites (BL) et (AK). (0,5 pt)

4.a) Soit f_2 la similitude directe qui transforme B en D et O en L. Préciser son angle et son rapport. (0,5 pt)

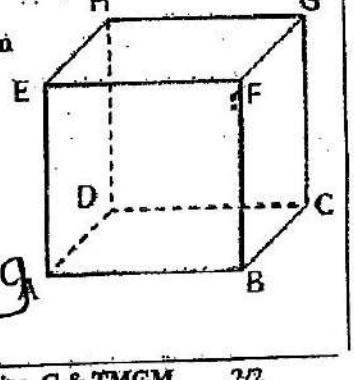
b) Montrer que le centre de la similitude f_2 est le point P : même centre de f_1. (0,5 pt)

5.a) Soit $h=f_1\circ f_2$. Montrer que h est une homothétie dont on précisera le centre est le rapport. En déduire deux réels β et γ tels que $P=\text{bar}\{(B,\beta);(L,\gamma)\}$. (0,5 pt)

b) Déterminer deux réels α et λ tels que $P=\text{bar}\{(A,\alpha);(K,\lambda)\}$. (0,25 pt)

Partie B

On se place maintenant dans l'espace et on construit sur le carrée précédent un cube ABCDEFGH. On note : s_1 la réflexion de plan (ABCD) ; s_2 la réflexion de plan (AEHD) ; s_3 la réflexion de plan (ABFE) et s_4 la réflexion de plan (DCGH). Soit $f=s_1\circ s_2\circ s_3\circ s_4$; $r=s_1\circ s_2$ et $t=s_3\circ s_4$.



On ne demande pas de reproduire la figure.

1) Montrer que r est un demi-tour dont on précisera l'axe. (0, 5 pt)

2) Montrer que t est une translation dont on précisera le vecteur. (0, 5 pt)

3) Reconnaitre et caractériser f. (0, 5 pt)

209

Fin.

BAC 2014
Session Compl.

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2014

Session Complémentaire

1435 رمضان

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (3 points)

On considère l'équation (E) : $11x+9y=19$, où x et y sont des entiers relatifs.

1.a) Vérifier que $(-4,7)$ est une solution particulière de (E). (0,5

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E). (1 pt

2) Uniquement , pour la série C

Une variable aléatoire réelle X ne prend que trois valeurs : -4, 7 et 8, avec les probabilités respectives:

$p_1=\frac{x-4}{9}$, $p_2=\frac{2x-y-8}{9}$, $p_3=\frac{8x+10y+2}{9}$.

a) Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers (x, y) tel que ces coordonnées soient acceptables. Préciser le. (0, 7

b) Montrer que l'espérance mathématique de X est $E(X)=6$. (0, 5

c) Calculer la variance de X. (0,25

2.bis) Uniquement , pour la série TMGM

On considère l'équation (E') : $(11-9i)z+(11+9i)\bar{z}=38$, d'inconnue complexe. $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.

a) Montrer que si z est une solution de (E'), alors $\bar{z}$ est aussi une solution de (E'). (0, 5

b) Soit M(x,y) un point d'affixe z où z est une solution de (E'). Montrer que l'équation (E') admet une infinité de solutions et déterminer le lieux géométriques Δ des points M(x,y). (0, 5

c) Quels sont les points M(x,y) de Δ dont les coordonnées sont des entiers relatifs ? (0, 5

Exercice 2 (4 points)

1) Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose: $P(z)=z^3+(2-2i)z^2+(-2-8i)z-8+4i$.

a) Calculer $P(2i)$. (0,7

b) Résoudre l'équation $P(z)=0$. (1 pt

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère la transformation f d'expression : $z'=\frac{1}{3}iz+\frac{2}{3}+2i$.

a) Montrer que f est une similitude directe. Préciser le centre A , le rapport et un angle de f. (0,75

b) Calculer l'affixe z_C du point C image de B(-3,-1) par f. Placer les points A , B et C sur la figure et montrer que le triangle ABC est rectangle. (0,75

c) Calculer l'affixe z_G du point G barycentre du système $S=\{(A,-4);(B,1);(C,6)\}$. Vérifier que les points A, B, C et G sont cocycliques. (0,25

3) Déterminer puis construire les ensembles Γ_1 et Γ_2 des points M du plan définis par :

a) $M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow -4MA^2+MB^2+6MC^2=30$ (0,25

b) $M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow MB^2-MC^2=16$. (0,25

Exercice 3 (4 points)

1) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=-x^2-\ln x$.

a) Dresser le tableau de variation de g. (0,5

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $]0;+\infty[$ une unique solution α. Vérifier que $\frac{1}{e}<\alpha<1$. En déduire le signe de $g(x)$. (0,75

217

2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=-x+1+\frac{1}{x}(1+\ln x)$.

a) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. Interpréter graphiquement. (0,25 pt)

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(1-x))$. Interpréter graphiquement. (0,25 pt)

c) Vérifier que $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ et dresser le tableau de variation de f. (0,75 pt)

d) Construire la courbe représentative de f. (0,25 pt)

3) Soit f_m la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f_m(x)=-x+1+\frac{m^2}{x}(1+\ln x-\ln m)$, où m est un paramètre réel strictement positif.

a) Montrer que les courbes (C_m) représentatives des fonctions f_m dans un repère cartésien, admettent les mêmes asymptotes, dont on précisera le point d'intersection, noté G. (0, 5 pt)

b) Montrer que (C_m) est l'image de (C_1) par une homothétie de centre G dont on précisera le rapport. (0, 5 pt)

c) Déduire le tableau de variation de f_m à partir de celui de f. (0, 25 pt)

Exercice 4 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC équilatéral direct de centre O et de côté a, $(a>0)$.

Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

L'objectif de cet exercice est l'étude de quelques propriétés de la configuration précédente.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (On pourra prendre la droite (AB) horizontale) (0,75 pt)

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme A en B et C en A. (0,5 pt)

c) Déterminer un angle de r_1 et préciser son centre. (0,5 pt)

d) On considère la rotation r_2 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer $r_1 o r_2(B)$ et caractériser $r_1 o r_2$. (0,5 pt)

2) On considère les points D et E symétriques respectifs de I et J par rapport à K.

a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme A en K et J en E. (0,5 pt)

b) Justifier que g est une symétrie glissante. Déterminer g(D) et donner la forme réduite de g. (0,5 pt)

3.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s_1 qui transforme B en I et C en J. (0,25 pt)

b) Déterminer le rapport et un angle de s_1. Justifier que O est le centre de s_1. (0,5 pt)

4) On considère les points $M\in[BC]$, $N\in[CA]$, $P\in[AB]$, tels que $BM=CN=AP=x$, $x\in[0,a]$.

a) Montrer que le triangle MNP est équilatéral et de centre O. (0,25 pt)

b) Soit H le milieu de [MN]. Déterminer le lieu géométrique de H lorsque M décrit [BC]. (0,25 pt)

c) A partir d'une position donnée de M sur [BC], montrer qu'il existe une unique similitude directe s_2 qui transforme (A,B,C) en (P,M,N). Préciser son centre. (0,25 pt)

d) Préciser la position de M sur [BC] pour laquelle, le quotient $\lambda=\frac{OM}{OB}$ est minimal. En déduire la position de M sur [BC] pour laquelle l'aire du triangle MNP est minimale. (0,25 pt)

278

Exercice 5 (4 points)

On considère la fonction numérique f définie sur R par : $f(x)=\frac{e^x}{e^x-x}$.

Soit Γ sa courbe représentative dans un nouveau repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1.a) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$. Donner une interprétation graphique. (0,5 pt)

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Donner une interprétation graphique. (0,5 pt)

c) Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe Γ, (On remarquera que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$). (0,75 p

2) Soit A l'aire du domaine plan limité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Montrer que $1 \le A \le \frac{e}{e-1}$. On ne cherche pas à calculer la valeur exacte de A. (0,25 p

3) Pour tout entier naturel n, on pose: $I_n = \int_0^1 x^n e^{-nx}dx$, pour $n \in \mathbb{N}^*$; et $I_0 = 1$

a) Montrer que $I_1 = 1-2e^{-1}$, (On pourra utiliser une intégration par parties). (0,5 pt)

b) Montrer que pour tout entier naturel $n>1$ on a, $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. (0,5 pt)

4) On pose pour tout entier naturel n : $S_n = I_0 + I_1 + \ldots + I_n$.

a) Justifier que : $S_n = \int_0^1 \frac{1-(xe^{-x})^{n+1}}{1-xe^{-x}}dx$. (0,25 p

b) Montrer que : $A - S_n = \int_0^1 \frac{(xe^{-x})^{n+1}}{1-xe^{-x}}dx$. (0,25 p

c) Montrer que $\frac{1}{n+2} \le A - S_n \le \frac{2}{n+2}$. En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = A$. (0,25 p

d) Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n > n_0$, A soit une valeur approchée de S_n à 10^{-2} près. (0,25 p

Fin.

219

BAC 2015
Session Normale

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et Concours
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2015

Session Normale

Série : C & TMGM
Epreuve : Mathématiques
Durée : 4 heures
Coefficients : 9 & 6

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On pose : $P(z)=z^3-(11+6i)z^2+(28+38i)z-12-60i$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:
$$P(z)=(z-3)(z^2+az+b).$$ (0,5 pt)

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$. (1 pt)

c) Soient les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $\text{Im}(z_A)<\text{Im}(z_B)<\text{Im}(z_C)$. Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$ et placer les points A, B, C et G. (0,5 pt)

2) Pour tout réel k différent de 2, on définit l'application f_k du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :
$$\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+(3-k)\overrightarrow{MC}.$$

a) Pour quelles valeurs de k, l'application f_k est une translation? Déterminer alors son vecteur. (0,5 pt)

b) On suppose que $k\in\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$. Montrer que f_k admet un unique point invariant Ω_k. Reconnaître alors f_k et donner ses éléments caractéristiques en fonction de k. (0,5 pt)

c) Déterminer et construire le lieu géométrique des points Ω_k lorsque k décrit $\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$. Reconnaître Ω_1. (0,5 pt)

d) Pour $k=1$; déterminer et construire le lieu géométrique du point R centre de gravité du triangle AMM' lorsque M décrit le cercle Γ de centre G passant par C. (0,5pt)

3) Pour tout point M du plan on pose $\varphi(M)=2MA^2-2MB^2+2MC^2$ et Γ_m l'ensemble des points M tels que $\varphi(M)=m$, où k est un réel.

a) Discuter suivant les valeurs de k, la nature de Γ_m. (0,5 pt)

b) Déterminer et construire Γ_m pour $m=10$. (0,5 pt)

AHD

Exercice 2 (5 points)

Dans le plan orienté on considère un rectangle direct ABCD de longueur AD tel que $AB=a$ et $AD=2a$, $(a>0)$. Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Soit O le centre du rectangle ABCD.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes. (0,5 pt)

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme B en C et J en D. Préciser le centre et un angle de r. (0,5 pt)

2.a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme I en C et A en K.

b) Montrer que g est une symétrie glissante et vérifier que $g=t_{\overrightarrow{IC}}\circ s_{AB}$. (0,25 pt)

c) Déterminer une droite Δ telle que $t_{\overrightarrow{BC}}=s_\Delta\circ s_{AB}$. En déduire la forme réduite de g, (on pourra remarquer que $t_{\overrightarrow{IC}}=t_{\overrightarrow{IB}}\circ t_{\overrightarrow{BC}}$). (0,5 pt)

3.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme A en C et B en L. Déterminer l'angle et le rapport de s. Montrer que $s(J)=B$. (0,25 pt) (0,5 pt)

220

b) Soient Γ_1 le cercle de centre A passant par B, et Γ_2 le cercle de centre C passant par L. Justifier que $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$ (0,25 pt)

4) On désigne par P le centre de s.

a) Montrer que P est situé sur les cercles Γ_1 et Γ_2. Préciser P. (0,25 pt)

b) Vérifier que P est le symétrique de L par rapport à (AC). (0,25 pt)

c) Soit E le symétrique de L par rapport à D. Vérifier que P est situé sur la droite (BE). (0,25 pt)

5.a) Soit R le symétrique de L par rapport à J. Montrer que $s(L) = R$. (0,25 pt)

b) Soit M un point de Γ_1 distinct de P. On note $s(M') = M''$. Montrer que :

i) La droite (MM'') passe par un point fixe que l'on précisera. (0,25 pt)

ii) Le triangle MM'M'' est rectangle isocèle. (0,25pt)

6) Soit Γ la parabole de foyer L et de directrice (BC).

a) Montrer que Γ passe par A, O et D, (0,25 pt)

b) Préciser la tangente à Γ en A et tracer Γ. (0,25 pt)

c) Déterminer et construire le foyer et la directrice de $\Gamma' = s(\Gamma)$. (0,25 pt)

AHD

Exercice 3 (5points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère dans un repère orthonormé.

1.a) Justifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Interpréter graphiquement. (0,75 pt)

b) Dresser le tableau de variation de f. (0,5 pt)

c) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera. Donner l'expression de sa réciproque $f^{-1}(x)$. On note (C') la courbe de f^{-1} dans le même repère. (0,5 pt)

2.a) Vérifier que le point $\Omega(0,\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe (C). (0,25 pt)

b) Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en un seul point d'abscisse α telle que $0,4 < \alpha < 0,5$. (0,5 pt)

c) Tracer les courbes (C) et (C'). (0,5 pt)

d) Calculer, en fonction de α, l'aire A du domaine plan limité par les courbes (C) et (C'), et les axes des coordonnées (On pourra remarquer que $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$). (0,25 pt)

3) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{\alpha} f^n(t)dt$ où α est le réel trouvé en 2.b)

a) Justifier que $I_1 = \alpha + \ln(2\alpha)$. (0,25 pt)

b) Vérifier que pour tout réel x : $f'(x) = f^2(x) - f(x)$. (0,25 pt)

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$. (0,5 pt)

d) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive. Que peut on en déduire ? (0,25 pt)

4.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\alpha^{n+1} \le I_n \le \frac{\alpha}{2^n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. (0,25 pt)

b) Montrer que $I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$. (0,25 pt)

221

Exercice 4 (5 points)

1) On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x)=\frac{3x^3-12x^2+19x-10}{x^3-4x^2+5x}$$

a) Déterminer a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $g(x)=\frac{(x-1)(ax^2+bx+c)}{x(x^2-4x+5)}$. (0,5 pt)

b) Etudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$. (0,5 pt)

2) On considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=3x-3+\ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right)$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, interpréter graphiquement. (0,5 pt)

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. (0,5 pt)

c) Montrer que (C) admet deux asymptotes dont l'une, notée D, est oblique. Etudier la position relative de (C) et de D. (0,5 pt)

3.a) Vérifier que $f'(x)=g(x)$ où g est la fonction définie en 1), et dresser le tableau de variation de f. (0,5 pt)

b) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 5×10^{-1}. (0,5 pt)

c) Construire (C). (0,5 pt)

4) On se propose dans cette question de calculer l'aire S du domaine délimité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $y=3x-3$, $x=3$ et $x=2+\sqrt{3}$.

a) Vérifier que pour tout réel x on a : $\frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}=2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{1+(x-2)^2}\right)$. (0,25 pt)

b) Calculer $A=\int_3^{2+\sqrt{3}}\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx$. (0,25 pt)

c) En posant $x=2+\tan t$ pour tout $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$; calculer $B=\int_3^{2+\sqrt{3}}\frac{1}{1+(x-2)^2}dx$. (0,25 pt)

d) En utilisant une intégration par parties, calculer $J=\int_3^{2+\sqrt{3}}\ln(x^2-4x+5)dx$ et $K=2\int_3^{2+\sqrt{3}}\ln x dx$. En Déduire le calcul de l'aire S exprimée en unité d'aire. (0,25 pt)

Fin.

AHD 222

BAC 2015
Session Compl.

8/0

$2x_0-3y_0 = 2x-3y$

$2(x-x_0) = 3(y-y_0)$

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et Concours
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2015

Session Complémentaire

Série : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (3 points)

Soit x et y des entiers relatifs. On pose $f(x,y) = 2x - 3y$

$3/(y-y_0) \times 3$

1.a) Calculer $f(5,3)$. (0,5 pt)

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $2x - 3y = 1$. (1 pt)

2) Pour tout entier naturel n on pose $X_n = f(5^n, 3^n)$.

a) Trouver, suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de X_n par 7. (1 pt)

b) Montrer que $X_{2015} - 5$ est divisible par 7. (0,5 pt)

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On pose : $P(z) = z^3 - (6+5i)z^2 + (1+20i)z + 14 - 5i$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z) = (z-i)(z^2 + az + b).$$

(1 pt)

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$. (1 pt)

2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 4+i$ et $z_C = 2+3i$.

Soit s la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

a) Donner l'expression complexe de s. (0,75 pt)

b) Déterminer le rapport et un angle de s. (0,5 pt)

3a) Déterminer puis construire les ensembles Γ_1 et Γ_2 des points M du plan définis par :

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \frac{z-i}{z-4-i} \text{ est imaginaire pur.}$$ (0,25pt)

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \frac{z-i}{z-2-3i} \text{ est imaginaire pur.}$$ (0,25 pt)

b) Justifier que $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$. (0,25 pt)

Exercice 3 (4 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral direct ABC de centre O et de coté a, $(a > 0)$. Soient I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes (on prendra (AB) horizontale). (0,5 pt)

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme B en C et J en K. Préciser le centre et un angle de r_1. (0,75 pt)

c) Soit la rotation r_2 qui transforme B en C et K en J. Préciser le centre et un angle de r_2. (0, 5 pt)

2.a) Soit $f = r_1 \circ r_2$ et $g = r_2 \circ r_1$. Caractériser f et g. (0,5 pt)

b) Montrer que $g \circ f = t_{\overrightarrow{BC}}$ où $t_{\overrightarrow{BC}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. (0,25 pt)

3.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme B en I et C en J. Déterminer l'angle et le rapport de s. (0,5 pt)

b) Déterminer s(A) et s(O). (0,25 pt)

237

i) Caractériser la composée $h = r_1 \circ s$.

j) Soit Γ l'ellipse de foyers I et J passant par C.

k) Montrer que $K \in \Gamma$. (0,25 pt)

l) Construire les sommets de Γ. Justifier la construction. (0,25 pt)

Exercice 4 (4 points)

(0,25 pt)

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$.

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. (0,75 pt)

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n(x) = \frac{(1+x)^n}{e^x}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $F_n(x) = \int_{-1}^{x} f_n(t)dt$. (0,25 pt)

Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x)$

3) Soit $I_n = F_n(0) = \int_{-1}^{0} f_n(t)dt$. (0,75 pt)

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive. (0,5pt)

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$. (0,5 pt)

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $U_n = \frac{I_n}{n!}$ (0,5 pt)

a) Montrer que $U_{n+1} = U_n - \frac{1}{(n+1)!}$. En déduire que $U_n = e - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

b) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. (0,5 pt)

(0,25 pt)

Exercice 5 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\ln(x+1)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.a) Justifier que $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $f'(x)$ et justifier que : (0,5 pt)

$$\begin{cases} -1 < x \le 0 \Rightarrow f'(x) \le 0 \\ x \ge 0 \Rightarrow f'(x) \ge 0 \end{cases}$$

(0,5 pt)

c) Dresser le tableau de variation de f.

2.a) Tracer la courbe (C). (0,5 pt)

b) En remarquant que $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$, calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$. (0,25 pt)

c) En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire A du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. (0,5 pt)

3) Pour tout entier naturel non nul n on pose : $U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$ (0,25 pt)

a) Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (U_n). Justifier que $U_1 = \frac{1}{4}$.

238 (0,5 pt)

b) Motrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. (0,5 pt)

4) Pour tout $n \geq 2$; et pour tout réel x de $[0,1]$ on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-x)^n.$$

a) Justifier que : $S_n(x) = \frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$. (0,25 pt)

b) Montrer que: $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$. (0,25 pt)

c) En utilisant une intégration par parties, montrer que:

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(\ln 2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right).$$ (0,25 pt)

5) Soit $V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$.

a) Monter que : $\frac{1}{2(n+2)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leq \frac{1}{n+2}$. (0,25 pt)

b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \ln 2$. (0,25 pt)

c) Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)U_n$. (0,25 pt)

2015.C

239

2015.S.C

BAC 2016
Session Normale

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2016
Session Normale

Séries : C & TMGM
Epreuve : Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (3 points)

On considère l'équation (E) : $5x-3y=17$, où x et y sont des entiers relatifs.

1.a) Justifier que l'équation (E) admet des solutions entières et vérifier que le couple $(4,1)$ est une solution particulière de (E). (0,75 pt)

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E). (0,75 pt)

2) Soit (x,y) une solution de (E).

a) Montrer que si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 17. (0,75 pt)

b) Soit m un entier relatif. Trouver les valeurs de m telles que le quotient $\frac{1+5m}{4+3m}$ soit un entier relatif. (0,75 pt)

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(4+8i)z^2+(-14+24i)z+32+4i$.

1.a) Calculer $P(2i)$ et déterminer deux nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$. (1 pt)

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$. On note z_1, z_2 et z_3 ses solutions avec $|z_1|<|z_2|<|z_3|$. (1 pt)

c) Soit A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3. Déterminer l'affixe du point G barycentre du système $\{(O,5);(A,-7);(C,4)\}$. Placer A, B ,C et G sur la figure. (0,75 pt)

2) Pour tout nombre complexe z on pose : $Q(z)=z^2-(4+6i)z-2+16i$.

On note Γ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Q(z)$ soit imaginaire pur (ou nul).

a) En posant $z=x+iy$, donner une équation cartésienne de Γ et montrer que Γ est une conique de centre G. (0,75 pt)

b) Préciser les sommets et l'excentricité de Γ puis la construire dans le repère précédent. (0, 5 pt)

Exercice 3 (4 points)

1) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par: $\begin{cases} f(x)=xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$ et que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. Interpréter. (1 pt)

b) Calculer et interpréter les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)$. (0,75 pt)

c) Dresser le tableau de variation de f. (0,5 pt)

d) Construire, dans le repère précédent la courbe (C). (0,25 pt)

2) On définit pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$ la fonction f_n par $\begin{cases} f_n(x)=xe^{\frac{n}{x}} & \text{si } x\neq 0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$.

Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans le repère précédent $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que (C_n) est l'image de (C) par une homothétie h_n de centre O dont on précisera le rapport. (0,5 pt)

b) Montrer que tous les points M_n de (C_n) en lesquels la tangente est horizontale, sont situés sur une même droite Δ dont on donnera une équation. (0,5 pt)

c) Sans étudier f_2, déduire de ce qui précède le tableau de variation de f_2 et la construction de sa courbe (C_2) dans le même repère. Justifier. (0,5 pt)

240

Exercice 4 (4 points)

Soit la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Montrer que $\lim_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ puis calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter. (0,75 pt)

b) Dresser le tableau de variation de f. (0,75 pt)

c) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on donnera les coordonnées. (0,25 pt)

d) Tracer la courbe (C). (0,25 pt)

2. a) Calculer $\int_0^x \ln(1+t)dt$ et déterminer la primitive F de f sur $]-1,+\infty[$ qui s'annule en 0 (On pourra écrire $f(x)=\ln(x+1)-1+\frac{1}{x+1}$). (0,25 pt)

b) Pour tout entier naturel $n\geq 1$, on note A_n l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\frac{1}{n}$. Donner l'expression de A_n en fonction de n. (0,25 pt)

3) Dans la suite de l'exercice on prendra x réel tel que $x\in]0;1[$ et n un entier naturel non nul.

a) Montrer que pour tout n: $\frac{1}{1+x}=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}x^{k-1}+\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$. (0, 5 pt)

b) En déduire que : $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}dt$. (0,25 pt)

c) En utilisant a) et b) ; montrer que : $f(x)=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{1-k}{k}x^k+\frac{(-1)^{n+2}x^{n+2}}{x+1}+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}dt$. (0,25 pt)

d) Montrer que : $0\leq\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}dt\leq\frac{x^{n+2}}{n+2}$. (0,25 pt)

e) En déduire que : $f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{1-k}{k}x^k$. (0,25 pt)

Exercice 5 (5 points).

Dans le plan orienté, on considère le carré direct ABCD de centre O et de coté a $(a>0)$.
I, J, K et L les milieux respectifs des cotés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Les points E et F tels que LDEF soit un carré direct.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (0, 5 pt)

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en D et L en E. (0, 5 pt)

c) Déterminer un angle et le centre de cette rotation. (0,5 pt)

2) a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s_1 qui transforme J en O et C en D. (0,5 pt)

b) Déterminer l'angle et le rapport de s_1. (0,5 pt)

c) Déterminer $s_1(B)$ que peut-on en déduire à propos du centre de s_1. (0,25 pt)

d) Déterminer $s_1(O)$ puis construire l'image du carré ABCD par s_1. Justifier la construction. (0,25 pt)

3) Soit s_2 la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer $s_2(O)$ et $s_2(C)$ (0,25 pt)

4) On pose $f=s_2\circ s_1^{-1}$ et pour tout point M du plan, on note $M_1=s_1(M)$, $M_2=s_2(M)$.

a) Déterminer $f(D)$ et caractériser f. (0,5 pt)

b) Montrer que si $M_1\neq M_2$ alors la droite (M_1M_2) passe par un point fixe que l'on déterminera. (0,5 pt)

c) Déterminer l'ensemble Γ_1 des point M du plan pour les quels les points M, M_1 et M_2 sont alignés. (On pourra utiliser l'angle $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$). (0,25 pt)

5.a) Vérifier que O est le barycentre du système $\{(A,1);(D,3);(E,-2)\}$. (0,25 pt)

b) Déterminer les ensembles Γ_2 et Γ_3 des points M du plan tels que :

$M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow 2MA^2+6MD^2-4ME^2=a^2$,

$M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{ME})(2\overrightarrow{ML}+2\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{MB})=0$. Que peut-on remarquer ? (0, 25 pt)

241

Fin.

BAC 2016
Session Compl.

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et des Concours
Service des Examens

Baccalauréat 2016
Session Complémentaire

Honneur - Fraternité - Justice

Séries : C & TMGM
Epreuve : Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(1+3i)z^2+2iz+6-2i$.

1.a) Calculer $P(1-i)$. (0,5 pt)

b) Déterminer deux nombres a et b tels que pour tout $z\in\mathbb{C}$ on a : $P(z)=(z-1+i)(z^2+az+b)$. (0,5 pt)

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$. (0,75 pt)

2) Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=-1+i$, $z_B=1-i$ et $z_C=1+3i$.

a) Placer les points A, B et C et déterminer la nature du triangle ABC. (0,75 pt)

b) Déterminer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$. (0,25 pt)

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan tels que :
$$2MA^2+MB^2+MC^2=16.$$ (0,25 pt)

d) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M du plan tels que :
$$-2MA^2+MB^2+MC^2=16.$$ (0,25 pt)

3) Soit s la similitude directe de centre C qui transforme A en B.

a) Déterminer l'écriture complexe de s. (0,25 pt)

b) Déterminer le rapport et un angle de s. (0,5 pt)

4) On considère la parabole P de foyer A et de directrice (BC).

a) Déterminer l'axe focal et le sommet de P. (0,5 pt)

b) Tracer P et P' dans le repère précédent où P' = s(P) . (0,25 pt)

c) Donner des équations cartésiennes de P et P' dans le repère précédent. (0,25 pt)

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=(1+x)e^{-x}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Vérifier que : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. (0,75 pt)

b) Interpréter les limites précédentes. (0,5 pt)

2.a) Dresser le tableau de variation de f et représenter sa courbe (C). (0,75 pt)

b) Calculer l'aire A du domaine plan délimité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=-1$ et $x=0$. (0,25 pt)

3) Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\frac{(1+x)^n e^{-x}}{n!}$ où n est entier naturel non nul.

Montrer que pour tout $x\in[-1;0]$ on a : $0\le f_n(x)\le\frac{e}{n!}$. (0,5 pt)

4) Soit la suite (I_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par : $I_n=\int_{-1}^{0}f_n(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{(1+x)^n e^{-x}}{n!}dx$.

a) En interprétant graphiquement I_1, donner sa valeur (On pourra utiliser A.2)). (0,25 pt)

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $I_{n+1}=I_n-\frac{1}{(n+1)!}$. (0,5 pt)

5) Soit la suite (U_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par : $U_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $I_n=e-U_n$. (0,5 pt)

2/2

b) Démontre que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $0\le I_n\le\frac{e}{n!}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$. (0,5 pt)

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$. (0,5 pt)

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{6e^{x}}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Vérifier que f est impaire et que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (0,75 pt)

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement. (0,5 pt)

c) Dresser le tableau de variation de f. (0, 5 pt)

d) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $\mathbb{R}$ trois solutions dont l'une α vérifie $2,8<\alpha<2,9$ (0,5 pt)

2.a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on déterminera. (0,25 pt)

b) Vérifier que pour tout réel x : $(f(x))^2-(f'(x))^2=-\dfrac{1}{9}$. En déduire l'expression de $(f^{-1})'(x)$. (0,5 pt)

c) Soit x un réel quelconque. Exprimer l'intégrale $I(x)=\int_0^x \dfrac{3}{\sqrt{9t^2+1}}dt$ en fonction de $(f^{-1})(x)$. (0,25 pt)

3) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Pour tout point M(x,y) on note $r(M)=M'$ et $r(C)=C_1$

a) Donner l'expression complexe de la rotation r puis écrire les coordonnées x',y' de M' en fonction de x et y. (0,5 pt)

b) Montrer que (C_1) est la courbe représentative de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x)=\ln(-3x+\sqrt{9x^2+1}).$$ (0,25 pt)

c) Montrer que pour tout réel x , $h(-x)=f^{-1}(x)$. On note (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le repère précédent. (0,25 pt)

4.a) Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en deux points autres que l'origine. (0,25 pt)

b) Construire, dans le même repère les courbes (C) et (C') et calculer en fonction de α l'aire du domaine plan délimité par ces deux courbes (α est le nombre indiqué en 1.d). (0,5 pt)

Exercice 4 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral direct ABC de centre G et de coté a $(a>0)$.
I , J , K et L sont les milieux respectifs des segments [BC], [AC], [AB] et [AI] et D le symétrique de I par rapport à J.

1) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (0,75 pt)

2.a) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme B en C et I en J. (0,5 pt)

b) Déterminer $r_1(K)$ et déterminer le centre et un angle de r_1. (0,75 pt)

3) Soit r_2 la rotation de centre K et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a) Déterminer $r_2(B)$ et $r_2(I)$. (0,5 pt)

b) En déduire $r_2(C)$. (0,25 pt)

4.a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f du plan qui transforme B en C et I en J. (0,5 pt)

b) Montrer que f est une symétrie glissante et donner sa forme réduite. (0,5 pt)

c) Caractériser la transformation $g=f\circ r_1^{-1}$. (0,25 pt)

5) On considère la transformation $\sigma=r_2\circ r_1$ et on pose $\sigma(M)=M'$.

a) Caractériser σ. (0,25 pt)

b) Montrer que si $M\neq M'$ alors la droite (MM') passe par un point fixe que l'on déterminera. (0,25 pt)

c) En déduire que le quadrilatère AMIM' est un parallélogramme. (0,25 pt)

6) Pour tout point M du plan, on pose $r_1(M)=M_1$ et $r_2(M)=M_2$.

Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan pour lesquels les points M, M_1 et M_2 sont alignés (On pourra utiliser l'angle $(\overrightarrow{MG};\overrightarrow{MK})$). (0,25 pt)

243

Fin.

BAC 2017
Session Normale

Baccalauréat 2017
Session Normale

Exercice 1 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) a- Soit a un nombre réel, résoudre dans l'ensemble de nombres complexes l'équation d'inconnue z :
$$(1+i)z^2-2(a+1)z-(-1+i)(a^2+1)=0$$ (1 pt)

b- Soient f et g les transformations données par leurs expressions complexes $f: z \to z' = 1 - iz$ et $g: z \to z'' = z - i$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations f et g. (0,5 pt

Dans le reste de l'exercice on considère les points I, M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_0 = 1 - i$, $z_1 = 1 - ia$ et $z_2 = a - i$ où $a = e^{i\alpha}$, $\alpha \in]0, 2\pi[$

2) a- Montrer que le triangle IM_1M_2 est rectangle en I, isocèle et direct. (0,5 pt

b- Préciser les lieux géométriques de chacun des points M_1 et M_2 lors que α décrit l'intervalle $]0,\pi[$ (0,5 pt

c- Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle pour α appartenant à l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. (0,5 pt)

3) Soit M_3 le point d'affixe $z_3 = i\sin\alpha + ia$ et soit G l'isobarycentre des points M_1, M_2 et M_3

a- Vérifier que $z_G = \frac{1+\cos\alpha}{3} + i\frac{(-1+2\sin\alpha)}{3}$ puis montrer que, pour $\alpha \in]0,\pi[$, le point G appartient à une ellipse Γ dont on donnera une équation. (0,5 pt)

b- Préciser les sommets et l'excentricité de Γ puis la construire dans le repère précédent. (0,5 pt)

Exercice 2 (6 points)

ABC est un triangle équilatéral direct de coté 4 cm, et de cercle circonscrit Γ, les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. On pose $A' = s_B(A)$.

1) a- Faire une figure illustrant les données que l'on complétera au fur et à mesure. On prendra (AB) horizontale. (0,75 pt

b- Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g vérifiant $g(B) = A$ et $g(A') = B$. Vérifier que g est une symétrie glissante et donner sa forme réduite. (0,75 pt

c- Soit r la rotation qui transforme C en B et J en K. Déterminer un angle et le centre de r. (0, 5 pt)

2) Soit s la similitude directe qui transforme A en B et C en I, et on pose $h = s \circ r$

a- Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de s. (0, 5 pt)

b- Soit Ω le centre de s. Montrer que $\Omega \in \Gamma$ et que les points Ω, A et I sont alignés. Placer alors Ω. (0, 5 pt)

c- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h. (0, 5 pt)

3) Soit M un point de Γ distinct de Ω, on pose $M' = s(M)$ et $M_1 = r(M)$

a- Montrer que le triangle $\Omega MM'$ est rectangle. (0, 5 pt)

b- Montrer que la droite (MM') passe par un point fixe que l'on déterminera. (0, 5 pt)

c- Montrer que les points M_1, M et M' sont alignés. (0, 25 pt

4) On pose $M_0 = A$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = s(M_n)$

a- Déterminer M_1 et construire M_2. (0, 25 pt

b- Vérifier que $M_{2017} \in (\Omega B)$ (0, 5 pt)

c- Pour tout entier naturel n, on pose $L_n = M_nM_{n+1}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} L_k$ exprimer S_n en fonction de n, puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$. (0, 5 pt)

Exercice 3 (5 points)

Pour tout entier naturel n on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

260

1) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe à déterminer. (0,5 pt)

2) a- Dresser le tableau de variation de f_0. (0,5 pt)

b- On considère les points M et N de la courbe (C_0) d'abscisses respectives x et $-x$. Déterminer les coordonnées de A, milieu de $[MN]$, que représente A pour (C_0) ? (0,5 pt)

3) a- Montrer que les courbes (C_0) et (C_1) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. (0,25 pt)

b- Déduire le tableau de variation de f_1 (0,25 pt)

c- Construire (C_0) et (C_1) dans le même repère. (0,5 pt)

4) On suppose que n est strictement supérieur à 1.

a- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)=+\infty$ puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}$. Interpréter. (0,75 pt)

b- Calculer f_n' et dresser le tableau de variation de f_n. (0, 5 pt)

5) Soit (u_n) la suite définie par : $u_n=\int_0^1 f_n(x)dx,\ n\in\mathbb{N}$

a- Justifier l'existence de (u_n) puis vérifier que $u_0=\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$ (0,5 pt)

b- Vérifier que $u_0+u_1=1$ et que $u_{n+1}+u_n=\dfrac{1-e^{-n}}{n}$ puis déduire u_1 et u_2 (0,5 pt)

c- Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite. (0,25 pt)

ıercice 4 (5 points)

ıit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$

a- Dresser le tableau de variation de f. (0, 75 pt

Déduire que pour tout entier $n\geq 6$, l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $\left[1,\sqrt{e}\right]$ une seule lution notée a_n (0, 25 pt

Prouver que la suite (a_n) est décroissante, en déduire qu'elle converge. (0,5 pt)

a- Montrer que pour tout entier k strictement supérieur à 1, on a : $\dfrac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}\leq\int_k^{k+1}\dfrac{\ln x}{x^2}dx\leq\dfrac{\ln k}{k^2}$ (0,5 pt)

Utiliser une intégration par parties pour exprimer en fonction de n l'intégrale : $\int_2^n\dfrac{\ln x}{x^2}dx,\ n\geq 2$. (0,5 pt)

Pour tout entier n supérieur strictement à 1, on pose : $S_n=\dfrac{\ln 2}{2^2}+\dfrac{\ln 3}{3^2}+\dfrac{\ln 4}{4^2}+....+\dfrac{\ln n}{n^2}$

Montrer que $S_n-\dfrac{\ln(2)}{(2)^2}\leq\int_2^n\dfrac{\ln x}{x^2}dx\leq S_n-\dfrac{\ln(n)}{(n)^2}$ (0,5 pt)

En déduire que : $\dfrac{1+\ln 2}{2}-\dfrac{n+(n-1)\ln(n)}{n^2}\leq S_n\leq\dfrac{2+3\ln 2}{4}-\dfrac{1+\ln(n)}{n}$ (0,25 pt)

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}$ et $I_n=\dfrac{1}{n!}\int_1^2\dfrac{(\ln x)^n}{x^2}dx$

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ 0\leq I_n\leq\dfrac{(\ln 2)^n}{n!}$ En déduire la limite de I_n (0,5 pt)

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ I_{n+1}=I_n-\dfrac{1}{2}\dfrac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$ (0,5 pt)

ɛn déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ I_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\ln 2}{1!}+\dfrac{(\ln 2)^2}{2!}+....\dfrac{(\ln 2)^n}{n!}\right]$ 261 (0,25 pt)

Exprimer (u_n) en fonction de I_n. En déduire la limite de (u_n). (0,5 pt)

Fin.

BAC 2017
Session Compl.

Exercice 1 (3 points)

1) On considère l'équation (E) : $2017x + 41y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs

a) Vérifier que 2017 est un nombre premier puis montrer que l'équation (E) admet des solutions entières. (0,75 pt)

b) Vérifier que le couple $(-5;246)$ est une solution particulière de (E). Résoudre l'équation (E). (1 pt)

c) Déduire qu'il existe un unique entier y inférieur ou égal à 2016 tel que : $41y \equiv 1[2017]$ (0,5 pt)

Pour la suite de l'exercice on rappelle qu'un entier x est l'inverse de y modulo 2017 si $ab \equiv 0[2017]$.

2) Soient a et b deux entiers relatifs.

a) Montrer que : si $ab \equiv 0[2017]$ alors $(a \equiv 0[2017]$ ou $b \equiv 0[2017])$ (0,25 pt)

b) Déduire que : si $a^2 \equiv 1[2017]$ alors $(a \equiv 1[2017]$ ou $a \equiv -1[2017])$ (0,25 pt)

c) Quels sont donc les entiers de l'intervalle $[1;4033]$ qui sont égaux à leurs inverses modulo 2017 ? (0,25 pt)

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On considère l'équation (E) : $iz^3 - (1+i)z^2 - (2+2i)z + 8i = 0$

a) Vérifier que l'équation (E) admet une solution réelle à déterminer. (0,5 pt)

b) Déterminer les deux autres solutions de l'équation (E). (0,5 pt)

c) Placer les points A, B et C d'affixes respectives : -2; $2-2i$ et $1+i$. Déterminer la nature du triangle ABC. (0,75 pt)

2) Soit s l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que $x' = x + y$ et $y' = -x + y - 2$

a) Donner l'expression complexe de s. (0,5 pt)

b) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de s. Déterminer s(C) (0,5 pt)

3) On désigne par z_G l'affixe du point G, centre de gravité du triangle ABC, et pour tout nombre complexe z on pose : $f(z) = |z+2|^2 + |z-2+2i|^2 + |z-1-i|^2$

a) Justifier que $z_G = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$ et que $f(z) = 3\left|z + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i\right|^2 + \frac{40}{3}$ (0,75 pt)

b) Déterminer, suivant les valeurs du réel k, l'ensemble Γ_k des points M du plan d'affixes z tels que : $f(z) = k$. Déterminer l'ensemble Γ_{20}. (0,5 pt)

Exercice 3 (5 points)

ABCD est un rectangle direct tel que $CB = 2CD$ et soient E, F et O les milieux respectifs des segments $[CB]$, $[AD]$ et $[AE]$. on pose $I = s_B(A)$.

1.a) Faire une figure illustrant les données qu'on complétera au fur et à mesure. On prendra (AB) horizontale. (0,25 pt)

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A vers E et E vers D. Préciser le centre et un angle de r. (0,75 pt)

c) On pose $f = s_{DE} \circ s_{BF} \circ s_{AE}$ déterminer f(A) et f(B) puis montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera la forme réduite. (0,75 pt)

2.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme O vers E et E vers B, déterminer le rapport et un angle de s. (0,75 pt)

b) Soit Ω le centre de s, montrer que Ω appartient aux cercles Γ_1 et Γ_2 de diamètres respectifs $[EF]$ et $[EI]$, construire Ω. (0,5 pt)

3) Soit M un point de Γ_1 différent de Ω et $M' = s(M)$

a) Soient J et K les milieux respectifs des segments $[EF]$ et $[EI]$. Montrer que $s(J) = K$. En déduire que $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$ (0,5 pt)

269

b) Montrer alors que la droite (MM') passe par un point fixe à préciser. (0,25 pt)

En déduire une construction de M' à partir d'une position donnée de M. (0,25 pt)

Soit (P) la parabole de directrice (AD) et de foyer E.

Déterminer le sommet de (P). (0,25 pt)

Montrer que (P) passe par B et C. (0,25 pt)

Déterminer les tangentes à (P) aux points B et C. (0,25 pt)

Montrer que (P) est la seule parabole de directrice (AD) passant par C et B. (0,25 pt)

rcice 4 (4 points)

ur tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on définit la fonction f_n sur $]0;+\infty[$ par :

$) = (\ln x)^n$ et on désigne par (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et discuter $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x)$ suivant la parité de n. (0,5 pt)

'alculer $f_n'(x)$ dérivée de $f_n(x)$ et dresser le tableau de variations de f_n (suivant la parité de n) (0,75 pt)

Etudier les positions relatives de et (C_2) et (C_3) (0,25 pt)

'onstruire (C_2) et (C_3) dans le même repère. (0,5 pt)

r tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on pose : $I_n = \frac{(-1)^n}{n!}\int_1^e f_n(x)dx$ et $u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ (0,25 pt)

Montrer que $I_2 = \frac{e-2}{2}$ (on procédera par intégration par parties).

fontrer que pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on a : $I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e + I_n$ (0,25 pt)

érifier que $I_2 = -1 + e.u_2$ (0,25 pt)

n déduire que $\forall n \ge 2,\quad I_n = -1 + e.u_n$ (0,25 pt)

Montrer que : $\forall x \in [1;e],\ 0 \le f_n(x) \le 1$. Déduire que $|I_n| \le \frac{e-1}{n!}$ (0,5 pt)

'éduire la limite de (I_n) puis celle de (u_n) (0,5 pt)

rcice 5 (4 points)

:onsidère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \int_x^{3x}\frac{e^{-t^2}}{t}dt \\ f(0) = \ln 3 \end{cases}$

$-(-1-3i)$

Montrer que : $\forall x \le 0,\quad e^x \le 1$ et que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad e^x \ge x+1$ (0,75 pt)

'éduire que : $\forall t > 0,\quad \frac{1}{t} - t \le \frac{e^{-t^2}}{t} \le \frac{1}{t}$ (0,25 pt)

$\frac{1+3i+1-3i}{2i}$

lontrer alors que $\forall x > 0,\quad \ln 3 - 4x^2 \le f(x) \le \ln 3$ (0,25 pt)

)éduire que f est continue et dérivable en 0^+, et que $f_d'(0) = 0$ (0,5 pt)

$\frac{2-2i}{2i} = 1-i$

On considère la fonction g, définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \int_1^x \frac{e^{-t^2}}{t}dt$

Justifier que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis déterminer sa dérivée $g'(x)$. $\frac{-1+3i-1+3i}{2i}$ (0,5 pt)

Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[,\quad f(x) = -g(x) + g(3x)$ (0,25 pt)

Déduire que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{e^{-x^2}}{x}\left(e^{-8x^2} - 1\right)$ $\frac{6i}{2i} = 3i$ (0,5 pt)

On suppose que x est supérieur à 1; Montrer que : $\forall t \in [x;3x],\quad e^{-9x^2} \le e^{-t^2} \le e^{-x^2}$ (0,25 pt)

n déduire que $\forall t \in [x;3x],\quad e^{-9x^2}\int_x^{3x}\frac{1}{t}dt \le \int_x^{3x}\frac{e^{-t^2}}{t}dt \le e^{-x^2}\int_x^{3x}\frac{1}{t}dt$ (0,25 pt)

éterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 270 (0,25 pt)

)resser le tableau de variation de f. (0,25 pt)

Fin.

BAC 2018
Session Normale

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
SERVICE DES EXAMENS

Baccalauréat 2018
Session Normale

Honneur – Fraternité – Justice

Séries : C & TMGM
Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures
Coefficients : 9 & 6

Exercice 1 (3 points)

1° On considère l'équation (E) : $25x - 49y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

a) Déterminer le pgcd de 49 et 25 à l'aide de l'algorithme d'Euclide et en déduire que l'équation (E) admet des solutions entières. — 0.75 pt

b) Vérifier que le couple $(10\ ;\ 5)$ est une solution particulière de (E). Résoudre l'équation (E). — 1 pt

c) Montrer qu'il existe un unique entier p compris entre 1960 et 2018 tel que : $25p \equiv 5[49]$. — 0,25 pt

2° a) Justifier que si (x, y) est une solution de (E) alors $5x \equiv 1[7]$ et $y \equiv 0[5]$. — 0.25 pt

b) Montrer que $5x \equiv 1[7]$ si et seulement si $x \equiv 3[7]$. — 0.25 pt

3° a) Soit x un entier relatif. Quels sont les restes de x^2 dans la division euclidienne par7 ? — 0.25 pt

b) Existe-t-il un couple (x, y) d'entiers relatifs tels que (x^2, y^2) soit solution de (E) ? — 0.25 pt

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - (1+4i)z^2 - (9-i)z - 6 + 18i$.

1.a) Calculer $P(3i)$ et déterminer les nombres a et b tels que $\forall z \in \mathbb{C} : P(z) = (z-3i)(z^2 + az + b)$ — 0.5 pt

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$. — 0.5 pt

c) On considère les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ tels que $|z_C| \le |z_B| \le |z_A|$. Placer les points A, B et C et déterminer la nature du triangle ABC. — 0.5 pt

d) Soit $A' = \text{bar}\{(A;-5),(B;6),(C;12)\}$. Vérifier que l'affixe de A' est $z_{A'} = -3 + i$. Placer A'. — 0.5 pt

2° On considère l'ellipse Γ de sommets A, A' et B.

a) Déterminer le centre I et l'excentricité de Γ. — 0.5 pt

b) Ecrire une équation cartésienne de Γ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. — 0.5 pt

c) Préciser les points d'intersection de Γ avec l'axe (Ox). — 0.5 pt

d) Déterminer les foyers et les directrices de Γ puis construire Γ. — 0.5 pt

Exercice 3 (4 points)

Soit ABCD un parallélogramme tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{4}$ et $AB = 2AD$.

On définit les points E, F, G et H tels que AFEB et ADGH soient des carrés directs.
Soit I, J et K les milieux respectifs des segments $[EC]$, $[CG]$ et $[GA]$.

1° Représenter les données précédentes sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure. — 0.5 pt

2° Soit R_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ et $f = T \circ R_A$.

a) Quelle est la nature de f ? — 0.25 pt

a) Déterminer $f(D)$ puis caractériser f. Quelle est l'image du point F par f ? — 0.5 pt

c) Justifier que les segments $[DF]$ et $[CG]$ sont perpendiculaires et de même longueur. — 0.5 pt

3°a) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{CE}$ puis en déduire que le triangle ECG est rectangle isocèle direct en C. — 0.5 pt

b) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme E en C et C en G. — 0.25 pt

c) Vérifier que g est une symétrie glissante dont on donnera la forme réduite. — 0.25 pt

4° Soit S la similitude directe qui transforme B en A et A en D.

a) Déterminer le rapport de S et une mesure de l'angle de S. — 0.5 pt

b) Montrer que le centre Ω de S appartient aux cercles Γ_1 et Γ_2 circonscrit respectivement aux carrés AFEB et ADGH. Placer Ω. — 0.25 pt

c) Montrer que $S(F) = G$ puis en déduire que $S(\Gamma_1) = \Gamma_2$. — 0.25 pt

d) Soit M un point de Γ_1 et $M' = S(M)$. Montrer que les points A, M et M' sont alignés. — 0.25 pt

271

Exercice 4 (4 points)

1° a) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - 6y' + 8y = 0$. — 0.25 pt

b) Déterminer la solution y_0 de (E) dont la courbe passe par le point $A(0, -1)$ et admet en ce point une tangente horizontale. — 0.25 pt

2° Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{4x}-2e^{2x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Calculer et interpréter les limites suivantes $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. — 0.75 pt

b) Dresser le tableau de variations de f. — 0.75 pt

3° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]-\infty,0]$.

a) Montrer que g réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on déterminera. — 0.25 pt

b) Calculer et interpréter $\lim\limits_{x\to-1} \frac{g^{-1}(x)}{x+1}$ où g^{-1} est la réciproque de g. — 0.25 pt

c) Soit (C') la courbe de g^{-1}. Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en un unique point B d'abscisse α tel que $-0,6<\alpha<-0,5$. — 0.25 pt

d) Tracer dans le même repère les courbes (C) et (C'). — 0.5 pt

e) Donner l'expression de $g^{-1}(x)$. — 0.25 pt

4° Soit S l'aire de la partie du plan délimitée par les courbes (C) , (C') et les axes de coordonnées.

a) Montrer que $S=2\int_{\alpha}^{0}(x-f(x))dx$. — 0.25 pt

b) Calculer la valeur de S en fonction de α et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près. — 0.25 pt

Exercice 5 (5 points)

Partie A :

Soit la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{x+1}-(x+1)\ln(x+1)$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement. — 0.75 pt

2. a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ puis étudier les variations de f'. — 0.5 pt

b) Calculer $f'(0)$ et en déduire le signe de $f'(x)$. — 0.25 pt

3. a) Dresser le tableau de variation de f. — 0.25 pt

b) Tracer la courbe (C). — 0.25 pt

3. a) Calculer $\int_0^x \frac{t}{t+1}dt$ et à l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^x (t+1)\ln(1+t)dt$. — 0.5 pt

b) En déduire la primitive F de f sur $]-1,+\infty[$ qui s'annule en 0. — 0.25 pt

c) Calculer l'aire A_n du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=n$, pour n un entier naturel $n\geq 1$. — 0.25 pt

Partie B :

Soit (U_n) la suite définie $\forall n\geq 1$ par $U_n=\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{3}f(2)+\frac{1}{4}f(3)+...+\frac{1}{n}f(n-1)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}f(k)$.

1° Posons $\forall n\geq 1$: $V_n=\frac{1}{n+1}f(n)$.

a) Vérifier que $\forall n\geq 1$, $V_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}-\ln(n+1)$. — 0.5 pt

b) En déduire que $U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\ln(n!)$. — 0.25 pt

2° Notons $\forall n\geq 1$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $S'_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

a) Montrer que $\forall k\geq 1$; $\frac{1}{k+1}\leq\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\leq\frac{1}{k}$ puis en déduire que $\frac{1}{n}+\ln n\leq S_n\leq 1+\ln n$. — 0.5 pt

b) Montrer que $\forall k\geq 1$; $\frac{1}{(k+1)^2}\leq\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^2}\leq\frac{1}{k^2}$ puis en déduire que $1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\leq S'_n\leq 2-\frac{1}{n}$. — 0.5 pt

c) En déduire que $\forall n\geq 1$: $\frac{2}{n}-2\leq U_n+\ln((n-1)!)\leq\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}$. — 0.25 pt

272

- Fin -

BAC 2018
Session Compl.

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
SERVICE DES EXAMENS

Baccalauréat
2018
Session Complémentaire

Honneur – Fraternité – Justice

Séries : C & TMGM
Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures
Coefficients : 9 & 6

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(7+3i)z^2+(12+15i)z-4-18i$.

1.a) Calculer $P(2)$ et déterminer les nombres a et b tels que $\forall z\in\mathbb{C}$: $P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$ — 0.75 pt

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$. — 0.5 pt

c) On considère les points A, B et D images des solutions de l'équation $P(z)=0$ tels que $\operatorname{Im}(z_A)\le\operatorname{Im}(z_B)\le\operatorname{Im}(z_D)$. Placer les points A, B et D et déterminer la nature du triangle ABD. — 0.75 pt

2° a) Déterminer le barycentre du système $\{(A;9),(B;-6),(C;2)\}$, où C est le symétrique de A par rapport à (BD). — 0.5 pt

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $9MA^2-6MB^2+2MC^2=-10$. — 0.5 pt

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que $4MA^2-6MB^2+2MC^2=-10$. — 0.5 pt

d) Déterminer et construire l'ensemble Γ_3 des points M du plan tels que $(9\overrightarrow{MA}-6\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=10$. — 0.5 pt

3° Soit $S^0=id$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $S^{n+1}=S\circ S^n$ où S est la similitude directe qui transforme A en B et B en D.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S^{2018} — 0.5 pt

b) Justifier que $S^{2020^{2020}}$ est une homothétie de rapport négatif — 0.5 pt

Exercice 2 (5 points)

I- On considère la fonction numérique f définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=(x+1)e^{\frac{-1}{x}}\ ;\ \forall x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 4 cm.

1° a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite de 0 — 0.5 pt

b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0,+\infty[$ — 0.5 pt

287

2° a) Montrer que $\forall t\ge 0$, $0\le e^{-t}+t-1\le\frac{t^2}{2}$ — 0.5 pt

b) En déduire que $\forall x>0$, $\frac{-1}{x}\le f(x)-x\le\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}$ — 0.25 pt

c) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique Δ dont on donnera l'équation. — 0.25 pt

3° Construire la courbe (C) et la droite Δ. — 0.5 pt

4° a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera. — 0.25 pt

b) Construire la courbe (C') de f^{-1}, où f^{-1} est la réciproque de f. — 0.25 pt

II- $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on définit sur $[0,+\infty[$ la fonction numérique f_n par $\begin{cases} f_n(x)=\left(x+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{-1}{x}}\ ;\ \forall x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$.

1° a) Montrer que f_n est continue et dérivable à droite de 0 — 0.5 pt

b) Etudier les variations de f_n et en déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x)=\frac{1}{n}$ admet une unique solution α_n sur $]0,+\infty[$. — 0.5 pt

2° a) Soit $g_n(x)=f_n(x)-\frac{1}{n}$. Etudier sur $]0,+\infty[$ le signe de de $g_{n+1}(x)-g_n(x)$ et en déduire que la suite (α_n) est strictement décroissante et qu'elle est convergente. — 0.5 pt

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha_n=\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)$. En déduire la limite de α_n. — 0.5 pt

Exercice 3 (5 points)

Soit ABCD est un carré direct de centre O et de côté $a > 0$. On note G le milieu du segment $[AB]$ et E et F les points tels que le quadrilatère AEFG soit un carré direct.

1°.a) Faire une figure illustrant les données qu'on complétera au fur et à mesure. On prendra (AB) horizontale. 0.5 pt

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme O en A et B en O. 0,25 pt

c) Déterminer les éléments caractéristiques de r. 0,25 pt

d) Soit g l'antidéplacement défini par $g(B) = E$ et $g(O) = G$. Montrer que g est une symétrie glissante et déterminer sa forme réduite. 0.5 pt

2°.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme C en F et B en E, déterminer le rapport et un angle de s. 0.5 pt

b) Déterminer l'image du carré ABCD par s puis en déduire le centre de s 0.5 pt

3° Soit $h = s \circ r^{-1}$

a) Montrer que h est une homothétie dont on précisera le rapport 0,25 pt

b) Soit I le centre de h. Montrer que I est le barycentre du système $\{(O,1);(E,2)\}$. Placer I 0,25 pt

c) Pour tout point M du plan, autre que I, on pose $M' = r(M)$ et $M'' = s(M)$.
Montrer que la droite $(M'M'')$ passe par un point fixe que l'on précisera 0,25 pt

4° Soit Γ l'hyperbole, de foyers O et F, qui passe par le point J projeté orthogonal de I sur (OF).

a) Déterminer les cordonnées des points O, E, I et J dans le repère $(G, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GO})$. 0.5 pt

b) Ecrire l'équation de Γ dans ce repère. 0.5 pt

c) Déterminer les sommets, les asymptotes et l'excentricité de Γ. 0.5 pt

d) Construire Γ. 0.25 pt

Exercice 4 (5 points)

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 2\ln(1+e^x)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A :

1° a) Donner le tableau de variation de f 1 pt

b) Démontrer que la courbe (C) admet deux asymptotes D et D' que l'on déterminera et préciser leurs positions relatives par rapport à (C). 0.5 pt

c) Construire la courbe (C) et leurs asymptotes dans le même repère. 0.25 pt

2° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$.

a) Montrer que g est une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on précisera. 0.25 pt

b) Construire, dans le repère précédent, la courbe (C') de g^{-1} 0.25 pt

Partie B :

On considère la suite numérique (u_n) par $u_0 = \ln 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \int_0^{\ln 5} (f'(t))^n dt$

1° Calculer u_1 0.25 pt

282

2° a) Montrer que $\forall x \in [0, \ln 5]$ $0 \le f'(x) \le \frac{2}{3}$ 0.25 pt

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \le u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \ln 5$ 0.25 pt

c) Déterminer la limite de (u_n) 0.25 pt

3° a) Montrer que $\forall x \in [0, +\infty[$ $(f'(x))^2 - 1 = -2f''(x)$ 0.25 pt

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} - u_n = \frac{-2}{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ 0.25 pt

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_{2n} = \ln 5 - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k-1}$ et $u_{2n+1} = \ln\left(\frac{9}{5}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}$ 0.5 pt

4° $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on pose $v_n = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p}\left(\frac{2}{3}\right)^p$. Montrer que $v_n = \ln 3 - \frac{u_{2n} + u_{2n+1}}{2}$ puis en déduire $\lim_{n \to +\infty} v_n$. 0.5 pt

- Fin -

BAC 2019
Session Normale

République Islamique de Mauritanie Ministère de l'Education Nationale et de la Formation Professionnelle Direction des Examens et des Concours	BACCALAUREAT 2019 Session Normale Epreuve : MATHEMATIQUES	Série : C & TMGM Coefficient : 9 & 6 Durée : 4h

Exercice1 (3 points)

1° On considère dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) : $7x-5y=1$

a) Justifier que le couple $(3;4)$ est solution de (E) puis résoudre (E). — 0.75 pt

b) Montrer que si $(x;y)$ est une solution de (E) alors $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ y \equiv 4[7] \end{cases}$ — 0.75 pt

2° Dans cette question on se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs A tels que $\begin{cases} A \equiv 4[5] \\ A \equiv 3[7] \end{cases}$

a) Soit A un élément de S. Démontrer qu'il existe un couple d'entiers $(x;y)$ tel que $A=7x+3=5y+4$ où $(x;y)$ est une solution de (E) — 0.5 pt

b) En déduire que $A \in S$ si et seulement si $A \equiv 24[35]$. — 0.5 pt

c) Soit n et a deux entiers naturels $(0<n<9)$ et B un entier qui s'écrit, en base n, sous la forme $\overline{374a}$. Déterminer n puis en déduire l'écriture décimale de l'entier B sachant qu'il appartient à S. — 0.5 pt

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1° Pour tout nombre complexe z on pose $P(z)=z^3-(5+4i)z^2+(7+10i)z+5-10i$.
Calculer $P(i)$ puis déterminer les solutions $z_0; z_1$ et z_2 de l'équation $P(z)=0$ avec $\mathrm{Re}(z_0)<\mathrm{Re}(z_1)<\mathrm{Re}(z_2)$. — 1 pt

2° On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_0; z_1 et z_2.

a) Déterminer la nature du triangle ABC. — 0.5 pt

b) Soit G le barycentre du système $\{(A,13);(B,-3);(C,2)\}$. Déterminer l'affixe de G. — 0.25 pt

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan tels que $13\,MA^2-3\,MB^2+2\,MC^2=12$ — 0.5 pt

3° On considère l'hyperbole H de centre G qui passe par C et dont A est un sommet.

a) Déterminer le 2ème sommet de H. — 0.25 pt

b) Vérifier que l'équation de H peut s'écrire sous la forme $x^2-3(y-2)^2=-3$. — 0.5 pt

c) Donner l'équation réduite de H puis déterminer ses foyers, ses asymptotes et son excentricité et la construire. — 1 pt

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x^3-x\ln x$ si $x>0$ et $f(0)=0$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1°a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite de 0. — 0.5 pt

b) Calculer et interpréter graphiquement $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. — 0.5 pt

2° a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et montrer que (C) admet un point d'inflexion A dont on précisera les coordonnées. — 0.5 pt

b) Etudier les variations de f' et en déduire le signe de $f'(x)$. — 0.5 pt

c) Dresser le tableau de variation de f. — 0.5 pt

3° a) Montrer que f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera. — 0.25 pt

b) Etudier la position relative entre (C) et (C') et justifier qu'elles se coupent en trois points dont l'un est d'abscisse α avec $0,45 \le \alpha \le 0,46$ ((C') étant la courbe de la réciproque f^{-1} de f). — 0.5 pt

4° Tracer dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ les courbes (C) et (C'). — 0.5 pt

5° a) A l'aide d'une intégration par parties déterminer la primitive F qui s'annule en 1 de la fonction f sur $]0;+\infty[$. — 0.25 pt

Exprimer en fonction de n et α les intégrales $K=\int_{\alpha}^{1} f(t)dt$ et $I(n)=\int_{\frac{1}{n}}^{\alpha} f(t)dt$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I(n)$. 0.75 pt

Déduire l'aire S du domaine plan fermé par les courbes (C) et (C'). 0.25 pt

ercice 4 (4 points)

n considère un triangle équilatéral direct ABC de côté a (a>0). Soient D, E et F les milieux spectifs des côtés [BC], [CA] et [AB]. On construit le carré direct AGHD de centre O. oient I, J et K les milieux respectifs des segments [EC], [GH] et [AD].

Faire une figure illustrant les données qu'on complètera au fur et à mesure. 0.25 pt

a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en C et E en D. 0.25 pt

Montrer que f est une symétrie glissante et donner sa forme réduite. 0.5 pt

a) Montrer qu'il existe une unique rotation r transformant H en B et D en E. Préciser son 0.5 pt
igle. Soit Ω son centre.

Montrer que Ω appartient à la droite (CF) et au cercle de diamètre [AB]. 0.5 pt

En utilisant les angles $(\overrightarrow{D\Omega},\overrightarrow{DE})$ et $(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DG})$ montrer que $\Omega\in(DG)$. Placer Ω. 0.5 pt

a) Montrer qu'il existe une similitude directe S et une seule qui transforme B en D et D en I. 0.25 pt

Soit S' la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$. Déterminer S'(B) et 0.5 pt
'(D). Caractériser S.

On considère la suite (M_n) définie par $M_0=B$ et $M_{n+1}=S(M_n)$.

Démontrer que le triangle AM_nM_{n+1} est rectangle. 0.25 pt

Déterminer la nature du triangle ABM_{2019} et calculer son aire en fonction de a. 0.5 pt

ercice 5 (4 points)

oit f la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$.

Etudier les variations de f et tracer sa courbe Γ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. 0.75 pt

Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α et que $0,7<\alpha<0,8$. 0.25 pt

Soit A l'aire du domaine délimité par Γ, (Ox) et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=\ln 3$.

) Montrer que $A=\int_{\alpha}^{\ln 3}\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$. 0.25 pt

) En posant $t=\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$, montrer que $A=\int_{\alpha}^{\frac{1}{2}}\frac{2dt}{t^2-1}$. 0.25 pt

) Déterminer les réels a et b tels que $\frac{2}{t^2-1}=\frac{a}{t-1}+\frac{b}{t+1}$ et en déduire la valeur de A. 0.5 pt

Soit (I_n) la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $I_n=\int_{\alpha}^{\ln 3}(f(t))^{2n}dt$ et $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} I_k=I_1+I_2+...+I_n$.

) Montrer pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ que $\frac{\ln 3-\alpha}{2^{2n}}\le I_n\le(\ln 3-\alpha)\alpha^{2n}$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. 0.5 pt

) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, $2f'(x)=(f(x))^3-f(x)$ (1). 0.25 pt

) En déduire que $\forall x\in\mathbb{R}$, $(f(x))^2=1+2\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$ puis en déduire I_1. 0.5 pt

a) Montrer à l'aide de l'égalité (1) que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_{n+1}-I_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^{2n}}-\alpha^{2n}\right)$. 0.25 pt

) Montrer que $I_{n+1}=\ln\left(\frac{3e^{-\alpha}}{4\alpha^2}\right)+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^{2k}}-\alpha^{2k}\right)$. 0.25 pt

) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\alpha^{2k}-\frac{1}{2^{2k}}\right)\right)=\ln\left(\frac{3}{4(1-\alpha^2)}\right)$. 0.25 pt

Fin